Zadanie 1 (8 pkt.)

Jeżeli $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, to $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c}=-\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=-\sqrt[3]{a}$ oraz
$0=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)^3=a+b+c+3\cdot\left[\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)+\sqrt[3]{b^2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c}\right)+\sqrt[3]{c^2}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\right]+$
$6\sqrt[3]{abc}=a+b+c+3\cdot\left[\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(-\sqrt[3]{a}\right)+\sqrt[3]{b^2}\cdot\left(-\sqrt[3]{b}\right)+\sqrt[3]{c^2}\cdot\left(-\sqrt[3]{c}\right)\right]+6\sqrt[3]{abc}=$
$a+b+c+3\cdot(-a-b-c)+6\sqrt[3]{abc}$
Stąd
$2\cdot(a+b+c)=6\sqrt[3]{abc}$, $a+b+c=3\sqrt[3]{abc}$, $(a+b+c)^3=27abc$

Zadanie 2 (8 kt.)

$x^4+2x^3-2ax-a^2=0$, $x^4-a^2+2x^3-2ax=0$, $\left(x^2-a\right)\left(x^2+a\right)+2x\left(x^2-a\right)=0$,
$\left(x^2-a\right)\left(x^2+2x+a\right)=0$, $x^2-a=0\vee x^2+2x+a=0$,
$x_1=\sqrt{a}$, $x_2=-\sqrt{a}$, $x_3=-1+\sqrt{1-a}$, $x_4=-1-\sqrt{1-a}$

Rozwiązania x_1 oraz x_2 istnieją tylko dla $a\ge 0$, przy tym dla $a=0$ mamy $x_1=x_2=0$.
Rozwiązania x_3 oraz x_4 istnieją tylko dla $a\le 1$, przy tym dla $a=1$ mamy
$x_3=x_4=-1$.
Ostatecznie mamy następujące rozwiązania:
1) $x_3=-1+\sqrt{1-a}$, $x_4=-1-\sqrt{1-a}$ dla $a<0$, wtedy $x_3\ne x_4$;
2) $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=-2$ dla $a=0$;
3) $x_1=\sqrt{a}$, $x_2=-\sqrt{a}$, $x_3=-1+\sqrt{1-a}$, $x_4=-1-\sqrt{1-a}$ dla $0<a<1$.
Wtedy x_1, x_2, x_3, x_4 są parami różne, bo $0<\sqrt{a}<1$, $-1<-\sqrt{a}<0$, $-1-\sqrt{1-a}<-1$, $-1<-1+\sqrt{1-a}<0$. Zatem teoretycznie jest możliwe tylko $x_2=x_3$, ale wtedy mielibyśmy $-\sqrt{a}=-1+\sqrt{1-a}$, czyli $1=\sqrt{a}+\sqrt{1-a}$, $1=a+2\sqrt{a(1-a)}+1-a$, $a(1-a)=0$, czyli $a=0$ lub $a=1$. Obie wartości są poza wskazanym zakresem.
4) $x_1=1$, $x_2=x_3=x_4=-1$ dla $a=1$;
5) $x_1=\sqrt{a}$, $x_2=-\sqrt{a}$ dla $a>1$, wtedy $x_1\ne x_2$.

Zadanie 3 (12 pkt.)

Oznaczmy $\frac{1}{\cos x}=m$, $\frac{1}{\cos 2x}=n$, gdzie m, n są liczbami całkowitymi. Z warunku $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1$ otrzymujemy $\frac{1}{n}=\frac{2}{m^2}-1$, czyli $m^2=\frac{2n}{1+n}$.
Wartość m^2 jest liczba całkowitą dodatnią, a iloraz $\frac{2n}{1+n}$ spełnia ten warunek tylko dla $n=1$, $n=-2$ oraz $n=-3$. Wynika to, np. z faktu, że $\frac{2n}{1+n}=\frac{2(1+n)-2}{1+n}=2-\frac{2}{1+n}$.

Wynik z prawej strony ostatniego znaku równości będzie liczbą całkowita tylko dla $\frac{2}{1+n}$ całkowitego. Widać jednak, że licznik jest mniejszy od bezwzględnej wartości z mianownika dla każdego $n>1$ i każdego $n<-3$. Z ostatniej wartości $n=-3$ wyszłoby jednak $m^2=\frac{-6}{-2}=3$, czyli m nie byłoby liczbą całkowitą. Pozostają więc dwa rozwiązania: $n_1=1$, $n_2=-2$. W pierwszym przypadku $m^2=1$, czyli $m_1=1$, $m_2=-1$; w drugim $m^2=4$, czyli $m_3=2$, $m_4=-2$. Oczywiście rozwiązaniami są pary (n_1, m_1), (n_1, m_2), (n_2, m_3), (n_2, m_4)

Teraz trzeba rozwiązać układy równań trygonometrycznych dla każdej z tych par:

$$\begin{cases}\frac{1}{\cos x}=1\\ \frac{1}{\cos 2x}=1\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{1}{\cos x}=-1\\ \frac{1}{\cos 2x}=1\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{1}{\cos x}=2\\ \frac{1}{\cos 2x}=-2\end{cases},\quad \begin{cases}\frac{1}{\cos x}=-2\\ \frac{1}{\cos 2x}=-2\end{cases}$$

Układy równoważne powyższym:

$$\begin{cases}\cos x=1\\ \cos 2x=1\end{cases},\quad \begin{cases}\cos x=-1\\ \cos 2x=1\end{cases},\quad \begin{cases}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{cases},\quad \begin{cases}\cos x=-\frac{1}{2}\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

W pierwszym układzie otrzymujemy $x=2k\pi$, ponieważ jest to rozwiązanie pierwszego równania, a $\cos 2x=1$ wszędzie tam, gdzie $\cos x=1$. Wynika to zarówno z dwukrotnego „zagęszczenia” cosinusoidy przy dwukrotnym wzroście argumentu, czy tez ze wzoru $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, gdzie dla $\cos x=1$ mamy $\sin x=0$.

Rozważmy jeszcze trzeci układ (drugi i czwarty rozwiązujemy analogicznie)

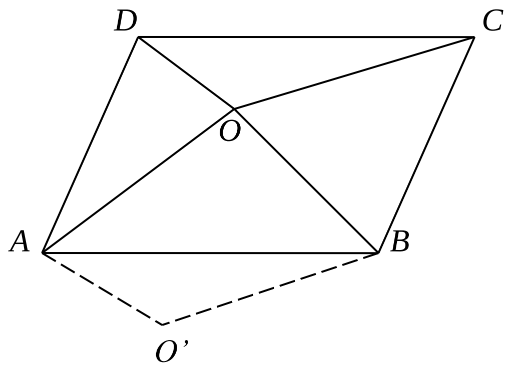
$\cos x=\frac{1}{2}$ dla $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ oraz dla $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

$\cos 2x=-\frac{1}{2}$ dla $2x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ oraz dla $2x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, czyli dla $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ oraz $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$. W tym przypadku rozwiązaniem będzie więc $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ oraz $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Trzeba dokończyć to rozwiązanie, ale już wiadomo jak.

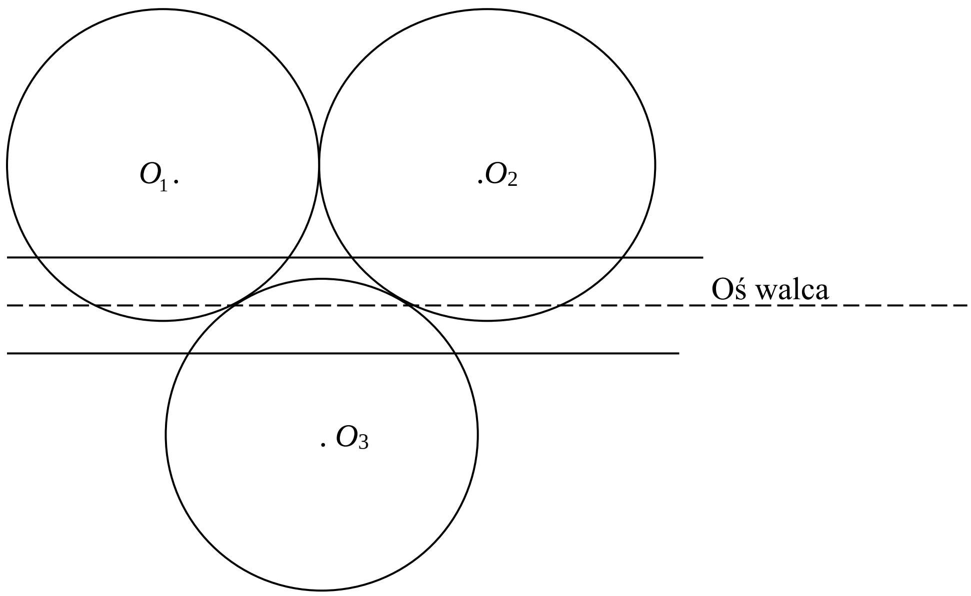
Zadanie 4 (10 pkt.)

Przez punkt *A* prowadzimy prostą równoległą do *DO*, a przez *B* – równoległą do *CO*. Przetną się one w punkcie *O'* i $\angle DOC=\angle AO'B$. W czworokącie *AO'BO* mamy $\angle AOB+\angle AO'B=180°$, więc można na nim opisać okrąg. Ponieważ $DO \parallel AO'$, $DC \parallel AB$ oraz $OO' \parallel CB$, to otrzymujemy $\angle ODC=\angle O'AB=\angle O'OB=\angle OBC$



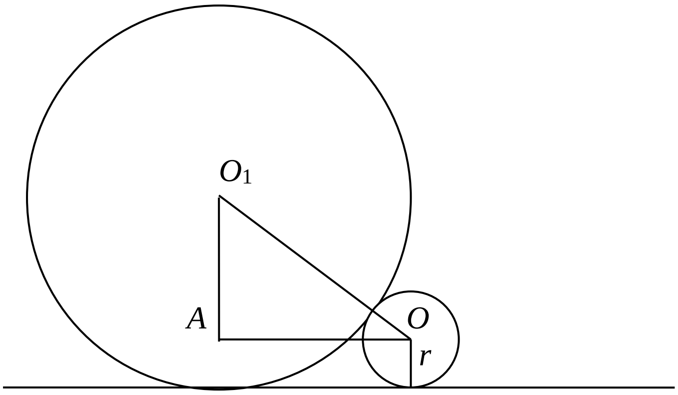
Zadanie 5 (12 pkt.)

Łatwo wyobrazić sobie 3 wzajemnie styczne kule o równym promieniu leżące na płaszczyźnie. Jeżeli walec też leży na tej płaszczyźnie i jest styczny do każdej z trzech kul, to musi on być wciśnięty między kule w ten sposób, że dwie kule leżą po jednej jego stronie, a trzecia po drugiej.



Środki kul O_1, O_2, O_3 są wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku 2 położonego równolegle do płaszczyzny, w której leżą wszystkie bryły, w odległości 1 od tej płaszczyzny. Gdyby umieścić jeszcze czwartą kulę tej samej wielkości (o środku O_4) styczną do kul o środkach O_2 i O_3, to proste O_1O_2 i O_3O_4 byłyby równoległe. Oznacza to, że oś walca jest równooddalona od każdego ze środków trzech kul. Wynika stąd w szczególności, że jeśli A jest rzutem prostopadłym któregokolwiek środka kuli na płaszczyznę równoległą do podstawy (na której leżą bryły), przechodzącą przez oś walca, to odległość punktu A od osi walca jest równa połowie wysokości trójkąta $O_1 O_2 O_3$, czyli $\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozważmy przekrój poprzeczny walca i stycznej do niego kuli. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:



$$(1-r)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=(1+r)^2, \qquad 1-2r+r^2+\frac{3}{4}=1+2r+r^2, \qquad 4r=\frac{3}{4}, \qquad r=\frac{3}{16}$$