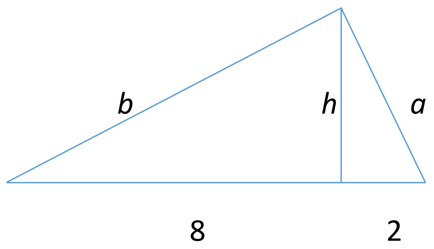
Zadanie 1.

W trójkącie prostokątnym wysokość opuszczona z wierzchołka kąta prostego podzieliła przeciwprostokątną na odcinki o długościach 2 cm i 8 cm.

Obliczyć pole i obwód tego trójkąta.

Rozwiązanie:



Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ h^2 + 4 = a^2 \\ h^2 + 64 = b^2 \end{cases}$$

Odejmując stronami od drugiego równania trzecie, otrzymujemy:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 100 \\ a^2 - b^2 = -60 \end{cases}$$

Dodając stronami, otrzymujemy:

$$2a^2 = 40$$
$$a^2 = 20$$
$$a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$b^2 = 100 - a^2 = 80$$
$$b = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

Pole trójkąta

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 20$$

Obwód trójkąta

$$Obw = a + b + 10 = 6\sqrt{5} + 10$$

Odpowiedź: Pole wynosi $S = 20$. Obwód = $6\sqrt{5} + 10$.

Zadanie 2.

Cena biletu na mecz wynosiła 20 zł. Gdy cenę obniżono okazało się, że na mecz przychodzi o 50% widzów więcej, a dochód ze sprzedaży biletów wzrósł o 20%.

O jaki procent obniżono cenę biletu ?

Rozwiązanie:

x - cena biletu po obniżce

n - liczba widzów przychodzących na mecz przed obniżką ceny biletu

$20n$ - dochód ze sprzedaży biletów przed obniżką

$1{,}5n$ - liczba widzów przychodzących na mecz po obniżce ceny biletu

$1{,}5 \cdot n \cdot x$ - dochód ze sprzedaży biletów po obniżce ceny biletu

Równanie: $1{,}5 \cdot n \cdot x = 1{,}2 \cdot 20n$

$$x = \frac{1{,}2 \cdot 20}{1{,}5} = 16$$

Cena biletu po obniżce wynosiła 16 zł.

Stanowi to $\frac{16}{20} \cdot 100\% = 80\%$ ceny przed obniżką.

Odp.: Cenę biletu obniżono o 20%.

Zadanie 3.

Drużyna składa się z 11 piłkarzy. Przeciętny wiek tej drużyny wynosi 24 lata. Podczas meczu jeden z graczy tej drużyny został kontuzjowany i musiał opuścić boisko. Przeciętny wiek pozostałych piłkarzy wyniósł 23 lata. Ile lat miał kontuzjowany piłkarz ?

Rozwiązanie:

Niech $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{11}$ oznacz wiek poszczególnych piłkarzy

Przeciętny wiek piłkarza wynosi

$$\overline{w}_{11} = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_{11}}{11}$$

Sumaryczny wiek wszystkich 11 piłkarzy wynosi

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_{11} = \overline{w}_{11} \cdot 11 = 24 \cdot 11 = 264$$

Dla 10 piłkarzy sumaryczny wiek wynosi

$$\overline{w}_{10} \cdot 10 = 23 \cdot 10 = 230$$

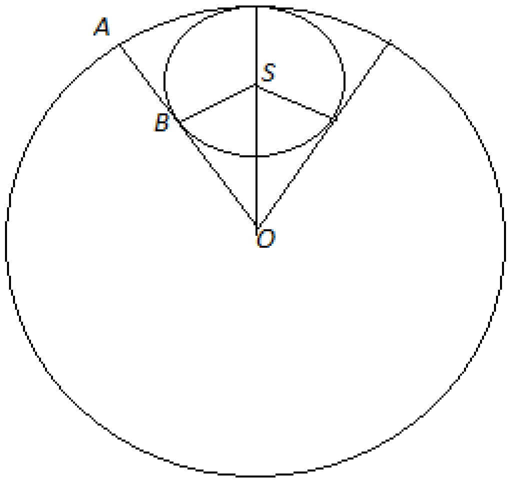
Różnica tych dwóch wielkości jest wiekiem kontuzjowanego piłkarza: 264 – 230 = 34

Odpowiedź: Kontuzjowany piłkarz miał 34 lata.

Zadanie 4.

W wycinek koła opartego na kącie środkowym o mierze 60° wpisano koło, którego pole jest równe 9. Oblicz pole wycinka kołowego.

Rozwiązanie:



Oznaczenia: r –promień okręgu wpisanego w wycinek koła

R – promień wycinka koła

$AO = R, \quad BS = r$

$$P_{koła} = \pi r^2 = 9 \Rightarrow r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

$$P_{wycinka} = \frac{1}{6}\pi R^2$$

W trójkącie prostokątnym *SBO* mamy:

$$\frac{r}{R-r} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{r}{R-r} = \frac{1}{2}$$

$$2r = R - r \Rightarrow R = 3r = \frac{9}{\sqrt{\pi}}$$

$$P_{wycinka} = \frac{1}{6}\pi R^2 = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{9}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{81}{6} = \frac{27}{2} = 13{,}5$$

Odpowiedź: Pole wycinka kołowego wynosi 13,5.

Zadanie 5.

Liczby $2+a$ oraz $35-b$ są podzielne przez 11.

Wykazać, że liczba $a + b$ jest również podzielna przez 11.

Rozwiązanie:

Liczba $2 + a$ jest podzielna przez 11, to znaczy istnieje liczba całkowita k taka, że

$$2 + a = 11k$$

Analogicznie

$$35 - b = 11s$$

Wtedy

$$a + b = 11k - 2 + 35 - 11s = 33 + 11k - 11s = 11(3 + k - s)$$

Liczba $(3 + k - s)$ jest liczbą całkowitą.

Oznacza to, że liczba $(a + b)$ jest podzielna przez 11.