XIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne.
Olsztyn 2015

Rozwiązania zadań dla szkół ponadgimnazjalnych

ZADANIE 1

Zakładamy, że $a, b \neq 0, 1$ i $a + b \neq 1$. Wykazać, że z równości

$$\frac{1}{a+b-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1$$

wynika, że a = -b

Rozwiązanie

Z tezy można się domyśleć, że daną równość należy przekształcić do postaci $(a + b)W(a, b) = 0$, gdzie wyrażenie $W(a, b)$ powinno być różne od 0.

Po przemnożeniu przez wspólny mianownik $(a + b - 1)ab \neq 0$ dostajemy równoważną równość

$$(a + b - 1)(a + b - ab) = ab,$$

a więc

$$(a + b)^2 - (a + b)ab - (a + b) + ab = ab.$$

Wyłączając $(a + b)$ dostajemy

$$(a + b)(a + b - ab - 1) = 0,$$

$$(a + b)[a(1 - b) + (b - 1)] = 0,$$

i stąd

$$(a + b)(a - 1)(1 - b) = 0.$$

Z założenia $a, b \neq 1$ wynika zatem, że zerować się musi pierwszy czynnik, a więc $a = -b$.

ZADANIE 2

Istnieje dokładnie jedna funkcja f spełniająca dla dowolnej liczby rzeczywistej x równość

$$f(x) + 2f(1-x) = x^2.$$

Wyznaczyć jej wzór.

Rozwiązanie

Wstawiając do danego równania $1-x$ w miejsce x dostajemy następujący układ równań:

$$\begin{cases} f(x) + 2f(1-x) & = & x^2 \\ f(1-x) + 2f(x) & = & (1-x)^2 \end{cases}.$$

Z tego układu można już wyznaczyć funkcję f.
Mnożąc drugie równanie przez 2 i odejmując od niego pierwsze dostajemy:

$$3f(x) = 2(1-x)^2 - x^2.$$

Stąd dostajemy wzór szukanej funkcji:

$$f(x) = \frac{2}{3}(1-x)^2 - \frac{1}{3}x^2,$$

równoważnie:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}.$$

ZADANIE 3

W jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = x^2 - 2014x$ określonej na zbiorze liczb całkowitych. Wykazć, że istnieje przedział liczb rzeczywistych dodatnich długości 2015 rozłączny z W.

Rozwiązanie

Przyda się nam następująca obserwacja. Wykres funkcji kwadratowej W staje się coraz bardziej stromy, gdy zmienna x dąży do nieskończoności. Dlatego różnica wartości $W(n+1) - W(n)$ rośnie nieograniczenie, gdy n dąży do nieskończoności.

Istnienie odcinka o żądanej własności można więc uzasadnić nastepująco.

Zauważmy najpierw, że wykres danej funkcji jest symetryczny względem prostej $x = 1012$ (punkt $(1012, f(1012))$ jest wierzchołkiem paraboli $y = x^2 - 2014x$). Dlatego zbiór W pokrywa się ze zbiorem wartości funkcji f dla liczb całkowitych $n \geq 1012$. Wyznaczmy wzór na różnicę wartości funkcji f dla dwóch kolejnych liczb całkowitych:

$$f(n+1) - f(n) = (n+1)^2 - 2014(n+1) - n^2 + 2014n = 2n - 2013.$$

Różnica ta jest większa od 2015 dla $n > 2014$. Ponieważ funkcja jest różnowartościowa i rosnąca na półprostej $[1012, \infty)$, więc przedział otwarty $(f(n), f(n+1))$ jest rozłączny z W. A więc dla dowolnej liczby $n > 2014$ przedział ten ma długość wiekszą niz 2015 i jest rozłączny z W.

Na przykład przedział $(2015^2 - 2014 \cdot 2015,\ 2016 - 2014 \cdot 2016)$ ma długość 2017, zawiera więc przedział długości 2015 spełniacy warunki zadania.

ZADANIE 4

W czworościanie foremnym ABCD o krawędzi długości 4 cm prowadzimy trzy płaszczyzny prostopadłe do krawędzi AB, AC, AD i przechodzące przez punkty tych krawędzi odległe o 3 cm od wierzchołka A. Wykazać, że płaszczyzny te dzielą ścianę BCD na cztery przystające trójkąty równoboczne.

Rozwiązanie

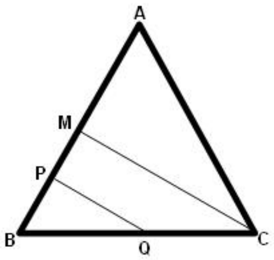
Podstawą rowiązania jest następujący fakt.

Przekrój płaszczyzny prostopadłej do prostej l z dowolną płaszczyzną Π zawierającą prostą l jest prostą w Π prostopadłą do l.

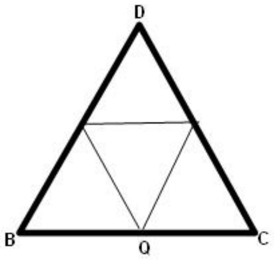
Wyznaczmy więc przekrój jednej z płaszczyzn podanych w zadaniu z jedną ze ścian.

Oznaczmy przez P punkt krawędzi AB oddalony o 3 cm od wierzchołka A. Płaszczyzna prostopadła do AB i przechodząca przez P przecina ścianę ABC wzdłuż prostej prostopadłej do krawędzi AB. A więc jeśli oznaczmy przez Q punkt wspólny tej płaszczyzny i krawędzi BC, to PQ jest prostopadła do krawędzi AB. Pokażemy, że Q jest środkiem krawędzi BC.

Ściany czworościanu foremnego są trójkątami równobocznymi, a w takim trójkącie wysokość pokrywa się z jego środkową. Wynika stąd, że środkowa MC, gdzie M jest środkiem krawędzi AB, jest równoległa do PQ, bo oba odcinki są prostopadłe do AB. Mamy $|PB| = \frac{1}{2}|MB|$, z twierdzenia Talesa wynika zatem, że $|BQ| = \frac{1}{2}|BC|$. Wobec tego Q jest środkiem odcinka BC. Inny argument to wyliczenie $|BQ| = 2$ z trójkąta prostokątnego BPQ w którym $\angle PBQ - 60^0$.



W taki sam sposób pokazuje się, że rozważana płaszczyzna przecina również krawędź BD w jej środku. Analogicznie dla pozostałych dwóch płaszczyzn. A więc dane płaszczyzny dzielą trójkąt odcinkami łączącymi środki boków na trzy przystające trójkąty równoboczne.

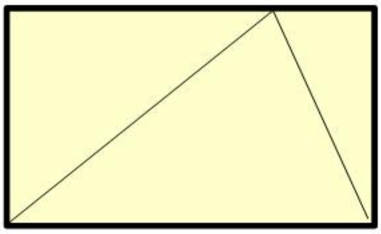


ZADANIE 5

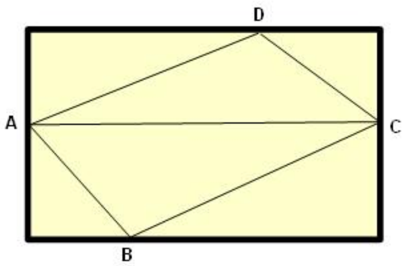
Wykazać, że dowolny wielokąt wypukły zawiera się w pewnym prostokącie o polu co najwyżej dwa razy większym od pola tego wielokąta.

Rozwiązanie

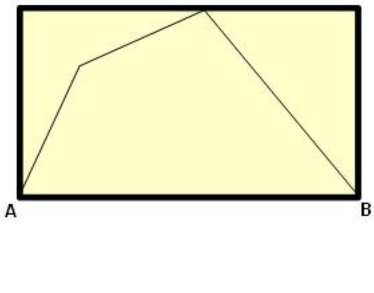
Jak zawsze warto rozważyć proste przypadki: trójkąt i czworokąt wypukły. Trójkąt zawiera się w prostokącie, którego jednym z boków jest najdłuższy z boków trójkąta a bok przeciwległy przechodzi przez przeciwległy wierzchołek trójkąta. Jak wynika ze wzorów na pole trójkąta i prostokąta, pole opisanego prostokąta jest dwukrotnie większe od pola danego trójkąta.



Jeśli przekątna AC czworokąta wypukłego $ABCD$ jest najdluższym bokiem obu trójkątów ACB, ACD, to suma prostokątów opisanych powyżej dla tych trójkątów jest prostokątem o polu dwa razy większym od pola czworokąta $ABCD$.



Ale jeśli żadna z przekątnych nie spełnia tego warunku, to jeden z boków czworokąta, powiedzmy AB, jest dłuższy od obu przekątnych (i pozostałych boków).



Wtedy kąty przy tym boku są ostre i czworokąt zawarty jest w prostokącie, którego jednym z boków jest AB, a bok przeciwległy do AB przechodzi przez ten wierzchołek, którego odległość od AB jest największa.

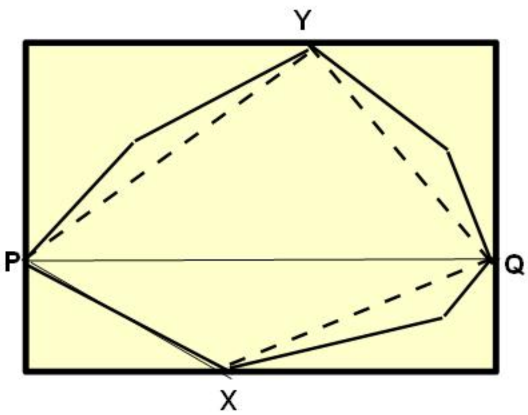
Z analizy tej wynika, że należy rozważyć najdłuższy z odcinków łączących wierzchołki (jest to najdłuższy odcinek zawarty w danym wielokącie). Przypomnijmy, że wielokąt wypukły ma taką własność: odcinek łączący dowolne dwa punkty wielokąta jest w nim zawarty. Wynika stąd, że trójkąt, którego wierzchołki należą do wielokąta wypukłego jest w tym wielokącie zawarty.

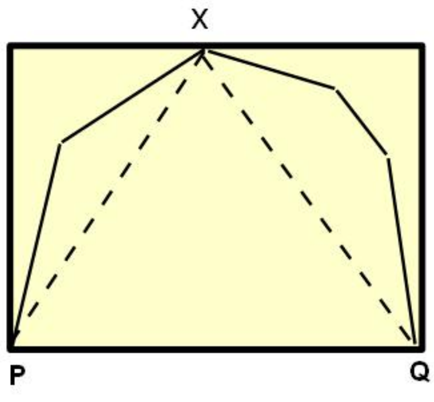
Niech P, Q będą najbardziej oddalonymi od siebie wierzchołkami danego wielokąta W. Wszystkie pozostałe wierzchołki muszą więc leżeć w pasie zawartym pomiędzy prostymi p, q prostopadłymi do odcinka PQ i przechodzącymi przez jego końce P, Q odpowiednio. Gdyby tak nie było, to poza tym pasem można by znaleźć pewien wierzchołek R wielokąta a wtedy PR lub QR byłby dłuższy od PQ, wbrew założeniu.

Jeśli PQ jest przekątną wielokąta, to po obu stronach prostej PQ leżą pewne wierzchołki wielokąta. Dla każdej strony prostej PQ weźmy wierzchołek wielokąta W najbardziej oddalony od prostej PQ (być może takich wierzchołków jest wiecej, wybierzmy dowolny z nich). Przez tak wybrane wierzchołki X i Y poprowadźmy odpowiednio proste x i y równoległe do PQ. Wszystkie wierzchołki wielokąta zawierają się zatem w prostokącie wyznaczonym przez proste p, x, q, y. Oznaczmy go $ABCD$. Z wypukłości wielokąta wynika, że zawiera on trójkąty PQX i PQY. Suma pól tych trójkątów, czyli pole prostokąta $ABCD$ jest równe dwóm polom prostokąta $PXQY$ a to ostatnie jest nie większe od pola wielokąta. Stąd

$$\mathcal{P}(ABCD) = 2\,\mathcal{P}(PXQY) \leq 2\mathcal{P}(W),$$

gdzie $\mathcal{P}$ oznacza pole.





Jeśli PQ jest bokiem wielokąta W to wszystkie wierzchołki leżą po jednej stronie prostej PQ i szukany prostokąt $PQCD$ (bo $AB = PQ$) znajdujemy analogicznie ograniczając się do jednego wierzchołka X najbardziej oddalonego od PQ. Wówczas $\mathcal{P}(PQCD) = 2\,\mathcal{P}(PQX) \leq 2\,\mathcal{P}(W)$.

Uwaga: nietrudno podać przykłady, że teza tego zadania nie jest prawdziwa bez założenia wypukłości.