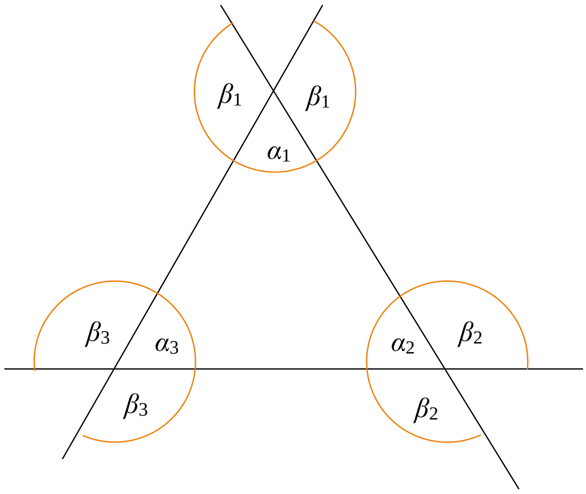
Suma miar kątów zewnętrznych w dowolnym wielokącie wypukłym

Michał Dąbrowski kl. IA   I Liceum Ogólnokształcące im. Stefana Żeromskiego w Ełku
pod kierunkiem nauczyciela – Grażyny Biernot-Lendo

Ogólnie wiadomo że suma miar kątów zewnętrznych w dowolnym wielokącie wypukłym jest stała liczbą. Dla niedowiarków można to łatwo udowodnić.

Najpierw pokażę to w trójkącie i czworokącie, a potem rozszerzę dla dowolnego wielokąta wypukłego.

1) W dowolnym trójkącie



Sk_z – suma kątów zewnętrznych

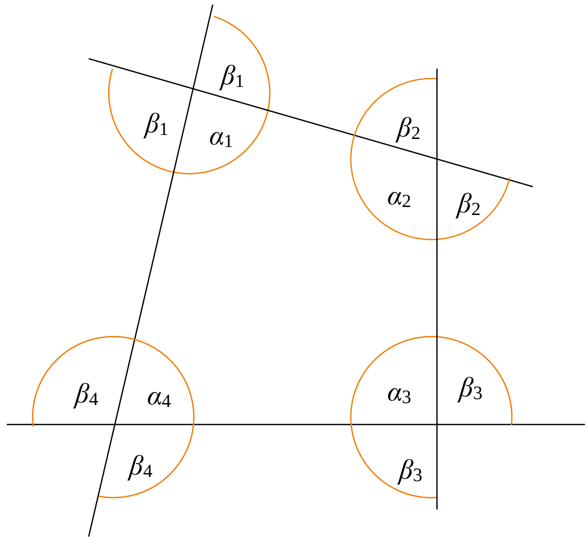
$$Sk_z = 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 = 2(180° - \alpha_1) + 2(180° - \alpha_2) + 2(180° - \alpha_3),$$

ponieważ $\beta_1 = 180° - \alpha_1$, $\beta_2 = 180° - \alpha_2$, $\beta_3 = 180° - \alpha_3$;

$$\begin{aligned} Sk_z &= 2(180° - \alpha_1) + 2(180° - \alpha_2) + 2(180° - \alpha_3) = \\ &= 360° - 2\alpha_1 + 360° - 2\alpha_2 + 360° - 2\alpha_3 = \\ &= 3 \cdot 360° - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= 1080^\circ - 2 \cdot 180° = 1080° - 360° = \\ &= 720° \end{aligned}$$

ponieważ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 180°$ (suma kątów wewnętrznych w dowolnym trójkącie).

2) W dowolnym czworokącie wypukłym

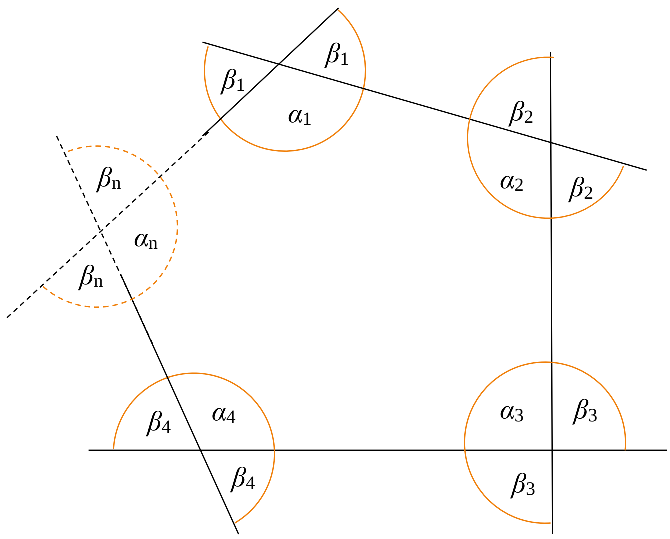


Taka sama sytuacja jak poprzednio tylko z większą liczbą kątów:

$$\begin{aligned}
Sk_z &= 2\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3 + 2\beta_4 = \\
&= 2\cdot(180° - \alpha_1) + 2\cdot(180° - \alpha_2) + 2\cdot(180° - \alpha_3) + 2\cdot(180° - \alpha_4) = \\
&= 360° - 2\alpha_1 + 360° - 2\alpha_2 + 360° - 2\alpha_3 + 360° - 2\alpha_4 = \\
&= 4\cdot 360° - 2\cdot(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \\
&= 1440° - 2\cdot 360° = 1440° - 720° = 720°
\end{aligned}$$

ponieważ $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ =360° (suma kątów wewnętrznych w dowolnym czworokącie wypukłym).

3) W dowolnym wielokącie wypukłym, gdzie: n – liczba kątów wielokąta, $n \in N \wedge n \geq 3$.



Do przeprowadzenia dowodu potrzebny będzie wzór na sumę kątów wewnętrznych w dowolnym wielokącie wypukłym (udowodniony w innym artykule):

$$Sk_w = 180° \cdot (n-2)$$

Z tą informacją możemy policzyć tym samym sposobem co wcześniej.

$$\begin{aligned} \mathrm{Sk}_Z &= 2\beta_1 + 2\beta_2 + ... + 2\beta_n = 2\cdot(180° - \alpha_1) + 2\cdot(180° - \alpha_2) + ... + 2\cdot(180° - \alpha_n) = \\ &= 360° - 2\alpha_1 + 360° - 2\alpha_2 + ... + 360° - 2\alpha_n = \\ &= n \cdot 360^\circ - 2\cdot(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n) \end{aligned}$$

Podstawiamy w miejsce $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_n$ wcześniej podany wzór czyli $180° \cdot (n-2)$

$$\begin{aligned} Sk_Z &= n \cdot 360° - 2\cdot[180° \cdot (n-2)] = \\ &= 360° \cdot n - 2\cdot(180° \cdot n - 360°) = \\ &= 360° \cdot n - 360° \cdot n + 720° = \\ &= 720° \end{aligned}$$

W ten sposób udowodniliśmy, że w dowolnym wielokącie wypukłym suma miar kątów zewnętrznych jest stała i wynosi 720°.