XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl styczniowy
Poziom: szkoły ponadpodstawowe

Zadanie 1. Udowodnij, że jeżeli dodatnie liczby wymierne a, b, c spełniają równość $a^2+b^2+c^2=abc$, to liczba $\sqrt{(a^3+bc)(b^3+ac)(c^3+ab)}$ jest też wymierna.

Rozwiązanie

Założenie: a, b, c - dodatnie liczby wymierne

$$a^2+b^2+c^2=abc$$

Teza: $\sqrt{(a^3+bc)(b^3+ac)(c^3+ab)}$ jest wymierna

Dowód:

Z założenia $a^2+b^2+c^2=abc$ wynika, że $a^2=abc-b^2-c^2$.

$a^3+bc=a(abc-b^2-c^2)+bc=a^2bc-ab^2-ac^2+bc=ab(ac-b)-c(ac-b)=(ac-b)(ab-c)$
analogicznie

$$b^3+ac=(bc-a)(ab-c) \quad \text{oraz} \quad c^3+ab=(ac-b)(bc-a)$$

$$\sqrt{(a^3+bc)(b^3+ac)(c^3+ab)}=\sqrt{(ac-b)(ab-c)(bc-a)(ab-c)(ac-b)(bc-a)}=$$

$$=\sqrt{(ac-b)^2(ab-c)^2(bc-a)^2}=\left|(ac-b)(ab-c)(bc-a)\right|$$

Ponieważ liczby a, b, c są wymierne, więc $\left|(ac-b)(ab-c)(bc-a)\right|$ jest też wymierna.

c.n.d.

Zadanie 2. Liczby x_1 i x_2 są miejscami zerowymi funkcji $f(x)=x^2+4bx+4c$, a liczby x_3 i x_4 miejscami zerowymi funkcji $g(x)=x^2+4cx+4b$. Wyznacz wszystkie pary $(b,\ c)$ liczb rzeczywistych, dla których $x_1x_2x_3x_4=16$.

Rozwiązanie.

Z warunków zadania wynika, że:

$$\Delta_1=16*(b^2-c)\geq 0 \text{ i } \Delta_2=16*(c^2-b)\geq 0, \text{ skąd } b^2\geq c \text{ i } c^2\geq b.$$

Ze wzorów Viete'a:

$$x_1x_2x_3x_4=(x_1x_2)(x_3x_4)=4c\cdot 4b=16bc=16, \text{ skąd } bc=1.$$

Zatem liczby b i c są jednakowych znaków.

Przypuśćmy, że $b = c$, wówczas $bc = b^2 = 1$, skąd $b = 1$ lub $b = -1$ i w konsekwencji otrzymujemy dwie pary liczb $b = 1$ i $c = 1$ oraz $b = -1$ i $c = -1$. Łatwo zauważyć, że obie te pary spełniają warunki zadania.

Rozważmy, że $b \neq c$. Jeżeli liczby b i c są dodatnie, to z warunku $bc = 1$ wynika, że jedna z nich jest mniejsza od 1, a druga większa od 1. Załóżmy, że $b > 1$ i $c < 1$. Wtedy jednak $c^2 < 1$ i $b > 1$, skąd $b > c^2$, co jest sprzeczne z założeniami zadania.

Jeżeli natomiast liczby b i c są ujemne, to obie nierówności $b^2 \geq c$ i $c^2 \geq b$ są zawsze prawdziwe. Wystarczy więc przyjąć, że $c = \frac{1}{b}$, gdzie $b < 0$. Stąd poszukiwanymi parami są $(b, \frac{1}{b})$, gdzie $b < 0$.

Odpowiedź. Warunki zadania spełniają wszystkie pary $(b, \frac{1}{b})$, gdzie $b < 0$.

Zadanie 3. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = log_4(x^2 + 4x + 20)$.

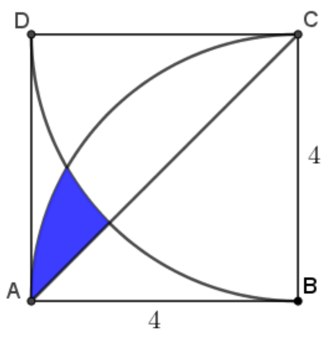
Rozwiązanie:

Zbiór wartości funkcji $g(x) = x^2 + 4x + 20$ jest dziedziną funkcji $f(x)$, więc $p = \frac{-b}{2a} = -2$, $q = f(p) = 4 - 8 + 20 = 16$. $ZW_g = < 16, \infty)$.

Wobec tego zbiór wartości ZW_f funkcji $f(x) = log_4(x^2 + 4x + 20)$ jest równy zbiorowi wartości funkcji rosnącej $h(x) = log_4(x)$, której dziedziną jest zbiór $< 16, \infty)$ oraz najmniejszą wartością funkcji jest $log_4 16 = 2$, zatem $ZW_f = < 2, \infty)$.

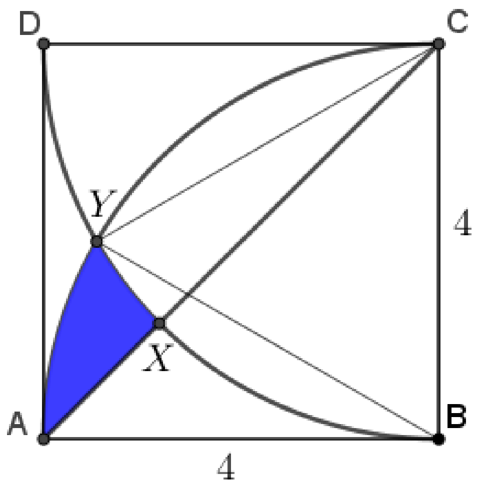
Odpowiedź. $ZW_f = < 2, \infty)$.

Zadanie 4. Oblicz pole powierzchni zacieniowanej figury, przedstawionej na rysunku.



Rozwiązanie.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenia.



Pole szukanego obszaru *AXY* = (pole wycinka koła *ABC*) – (pole wycinka koła *YBC*) – (pole odcinka koła o środku w punkcie *C*) – (pole obszaru *AXB*).

Pole odcinka koła *BY* o środku w puncie *C* = pole wycinka koła *BCY* – [*BCY*]. Trójkąt *BCY* jest trójkątem równobocznym (*BC* = *CY* = *YB*), a zatem $\angle BCY = \angle YBC = 60°$. Pole wycinka koła *YBC* jest zatem równe

$$\frac{60°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi = \frac{8}{3}\pi,$$

a pole trójkąta równobocznego *BYC* wynosi

$$\frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}.$$

Pole wycinka koła *ABC* jest równe

$$\frac{1}{4} \cdot 4^2 \cdot \pi = 4\pi.$$

Pole szukanego obszaru *AXY* = (pole wycinka koła *ABC*) – 2(pole wycinka koła *YBC*) + [*BYC*] – (pole obszaru *AXB*) = $4\pi - 2 \cdot \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} -$ (pole obszaru *AXB*) = $-\frac{4}{3}\pi + 4\sqrt{3} -$ (pole obszaru *AXB*).

Pole obszaru *AXB* = pole trójkąta *ABC* – pole wycinka *BCX*, zatem

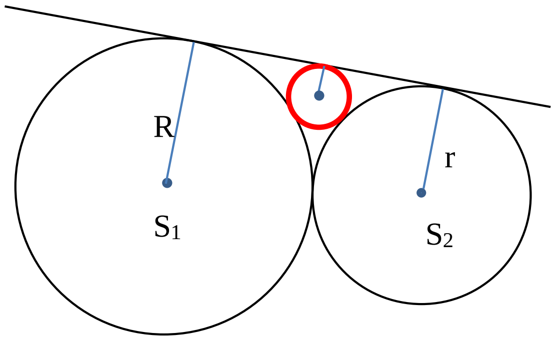
$$\frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{45°}{360°} \cdot 4^2 \cdot \pi = 8 - 2\pi.$$

Ostatecznie, otrzymujemy:

$$-\frac{4}{3}\pi + 4\sqrt{3} - (8 - 2\pi) = \frac{2}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 8 \approx 1{,}02.$$

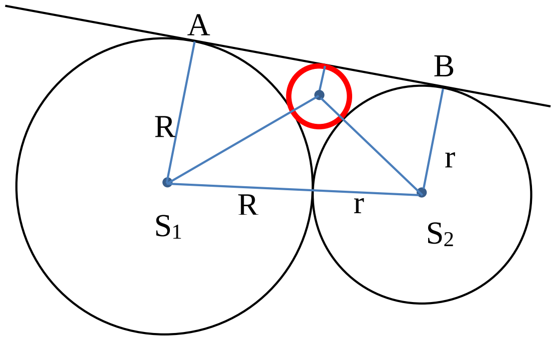
Odpowiedź. Pole zacieniowanej figury jest równe $\frac{2}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 8$.

Zadanie 5. Dwa okręgi o promieniach *R* i *r* są zewnętrznie styczne. Znaleźć promień okręgu stycznego do tych dwóch okręgów i ich wspólnej stycznej.

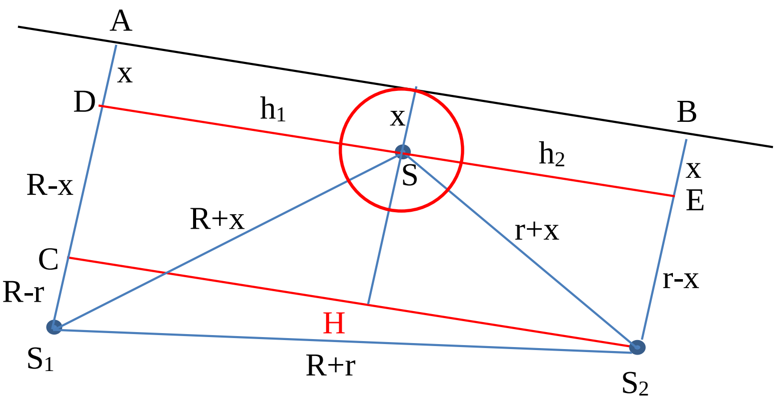


Rozwiązanie.

Wprowadźmy na rysunku z zadania dodatkowe oznaczenia



i przeanalizujmy układ ABS_1S_2



Z trójkąta prostokątnego CS_1S_2 mamy

$$H^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$$

$$H^2 + R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + 2Rr + r^2$$

$$H^2 = 4Rr$$

Z trójkąta prostokątnego S_1DS mamy

$$h_1^2 + (R-x)^2 = (R+x)^2$$

$$h_1^2 + R^2 - 2Rx + x^2 = R^2 + 2Rx + x^2$$

$$h_1^2 = 4Rx$$

Analogicznie dla trójkąta S_2ES otrzymujemy

$$h_2^2 = 4rx.$$

Ponieważ $H = h_1 + h_2$, więc

$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx}$$

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{Rx} + \sqrt{rx} \quad |^2$$

$$\sqrt{Rr} = \sqrt{x}\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)$$

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R} + \sqrt{r}} \quad |^2$$

$$x = \frac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$$

Odpowiedź. Promień szukanego okręgu równy jest $x = \dfrac{Rr}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{r}\right)^2}$.