XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl styczniowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \\ x \cdot y \cdot z = -1 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Dziedziną tego układu są: $x \neq 0, \ y \neq 0, \ z \neq 0$.

Drugie równanie mogę zapisać w postaci: (*) $\frac{1}{x} + \frac{y+z}{yz} = 1$

Z pierwszego równania wyznaczam $y + z$:

$$(**) \ y + z = 1 - x.$$

Z trzeciego równania wyznaczam $y \cdot z$:

$$(***) \ y \cdot z = \frac{-1}{x}.$$

Podstawiam (**) oraz (***) do równania (*) i otrzymuję równanie z jedną niewiadomą:

$$\frac{1}{x} + \frac{1 - x}{\frac{-1}{x}} = 0$$

$$\frac{1}{x} - x(1 - x) = 0$$

Równanie to dla $x \neq 0$ jest równoważne równaniu $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.

$$x^2(x + 1) - 1(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x + 1)(x + 1)(x - 1) = 0$$

Rozwiązaniem tego równania są $x \in \{-1, 1\}$.

Dla $x = 1$ otrzymujemy:

$$y + z = 0 \ \text{ oraz } y \cdot z = -1.$$

Wyznaczamy y z pierwszego równania: $y = -z$ i wstawiamy do drugiego równania.
Otrzymujemy: $-z \cdot z = -1$

$$z^2 = 1$$

$$z = 1 \ lub \ z = -1$$

Dla $z = 1$ $y = -1$, a dla $z = -1$ $y = 1$.

Dla $x = -1$ otrzymujemy:

$$y + z = 2 \text{ oraz } y \cdot z = 1.$$

Wyznaczamy y z pierwszego równania: $y = 2 - z$ i wstawiamy do drugiego równania. Otrzymujemy: $(2 - z) \cdot z = 1$

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$(z - 1)^2 = 0$$

Czyli $z = 1\ oraz\ y = 1$.

Odpowiedź. Podsumowując nasz układ równań ma trzy rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 2. Znajdź wszystkie funkcje $f : R \to R$, dla których zachodzi równość

$$xf(x) - f(1-x) = 5 .$$

Rozwiązanie:

W równaniu $xf(x) - f(1-x) = 5$ wykonajmy podstawienie: $x \to 1 - x$. Otrzymujemy

$$(1-x)f(1-x) - f(x) = 5$$

Potraktujmy te dwa równania jako układ z niewiadomymi f(x) i f(1-x)

$$\begin{cases} (1-x)f(1-x) - f(x) = 5 \\ xf(x) - f(1-x) = 5 \qquad /\cdot(1-x) \end{cases}$$

Mnożymy obustronnie aby dodać stronami dwa równania i zredukować f(1-x)

$$\begin{cases} (1-x)f(1-x) - f(x) = 5 \\ (1-x)xf(x) - (1-x)f(1-x) = 5(1-x) \end{cases}$$

$$-f(x) + (1-x)xf(x) = 5 + 5(1-x)$$

$$f(x)(-1 + x - x^2) = 10 - 5x$$

Dla wszystkich rzeczywistych x: $-1 + x - x^2 < 0$, więc możemy obustronnie podzielić ostatnie równanie i otrzymamy wzór szukanej funkcji.

Odpowiedź.

$$f(x) = \frac{10 - 5x}{-1 + x - x^2}$$

Zadanie 3.

Nie korzystając z rachunku pochodnych znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji określonej wzorem $f(x) = sin^6 x + cos^6 x$ w przedziale $<0; \frac{\pi}{2}>$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia i jedynki trygonometrycznej wzór danej funkcji po przekształceniach ma postać:

$$f(x) = sin^6x + cos^6x = (sin^2x)^3 + (cos^2x)^3 =$$
$$= (sin^2x + cos^2x)(\,3cos^4x - \ 3cos^2x + 1) = 3cos^4x - \ 3cos^2x + 1.$$

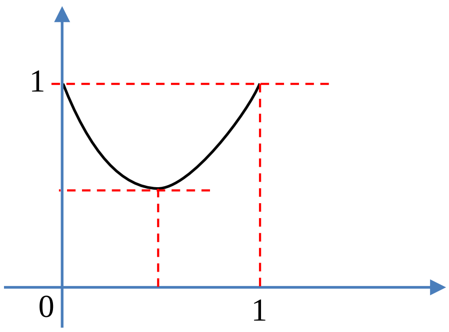
Przyjmując za $cos^2x = t$ otrzymujemy funkcję

$$f(t) = \ 3t^2 - \ 3t + 1, \text{ gdzie } t \ \in < 0; 1 >.$$

Rozwiązanie zadania sprowadza się do wyznaczenia najmniejszej i największej wartości funkcji kwadratowej w przedziale obustronnie domkniętym. Najmniejsza wartość funkcji f wynosi $\frac{1}{4}$, a największa 1.

W tym celu możemy wykorzystać postać kanoniczną trójmianu

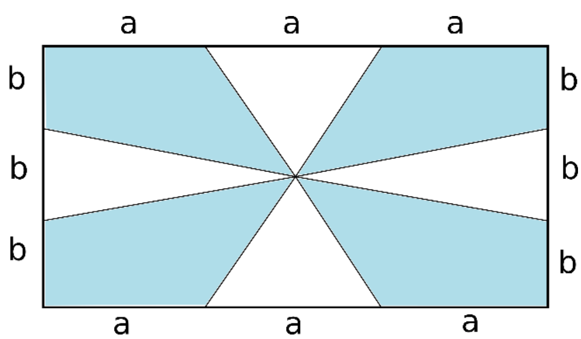
$$f(t) = \ 3t^2 - \ 3t + 1 = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \text{ , gdzie } t \ \in < 0; 1 >.$$



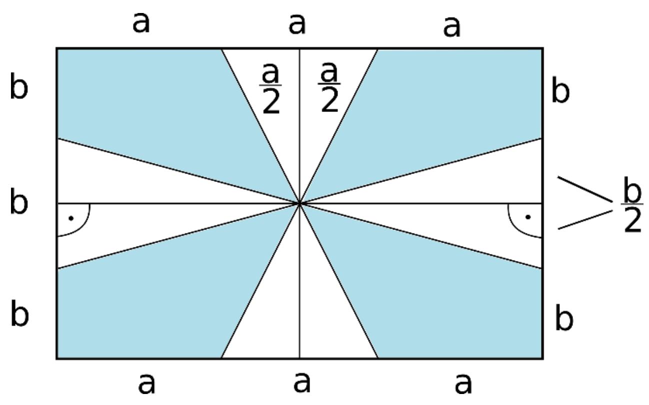
Odpowiedź. Najmniejsza wartość to ½, największa 1.

Zadanie 4.

Oblicz, jaki procent pola prostokąta stanowi pole zamalowanej figury?



Rozwiązanie:



Pole zamalowanej figury jest różnicą pola prostokąta i białych trójkątów.

Pole prostokąta: $P_1 = 3a \cdot 3b = 9ab$

Pola białych trójkątów: $P_2 = 2 \cdot (\frac{1}{2} a \cdot \frac{3}{2} b) + 2 \cdot (\frac{1}{2} b \cdot \frac{3}{2} a) = \frac{3}{2} ab + \frac{3}{2} ab = 3ab$

Pole zamalowanej figury: $P = P_1 - P_2 = 9ab - 3ab = 6ab$

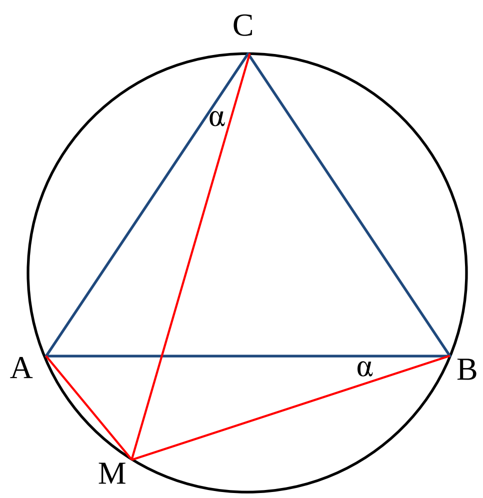
$$\frac{P}{P_1} \cdot 100\% = \frac{6ab}{9ab} \cdot 100\% = 66\frac{2}{3}\%$$

Odpowiedź. Pole zamalowanej figury stanowi $66\frac{2}{3}\%$.

Zadanie 5.

W okrąg jest wpisany trójkąt równoboczny ABC. Punkt M należy do krótszego z łuków AB.
Wykaż, ze AM +BM = CM.

Rozwiązanie:



Nich $< ACM = \alpha$. Z twierdzenia sinusów:

$AM = 2Rsin\alpha$

$BM = 2Rsin(60^0 - \alpha)$

$CM = 2Rsin(60^0 + \alpha)$

$Więc\ AM + BM = 2R\ (sin\alpha + \sin(60^0 - \alpha)) = 2R2sin30^0 \cdot \cos(\alpha - 30^0)$
$= 2Rsin(60 + \alpha) = CM$