XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl styczniowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y^2}+x=6 \\ \dfrac{1}{2y^2-2x}+\dfrac{x^2}{2}=12 \end{cases}.$$

Rozwiązanie:

Jeżeli podstawimy $\dfrac{1}{x-y^2}=u$, to wówczas otrzymamy układ: $\begin{cases} u+x=6 \\ -\dfrac{1}{2}u+\dfrac{x^2}{2}=12 \end{cases}.$

Po pomnożeniu drugiego równania utworzonego układu przez 2 oraz po dodaniu stronami otrzymamy: $x^2+x=30$. A więc $x_1=-6,\quad x_2=5$. Wtedy $u_1=12,\quad u_2=1$.

Mamy więc dwa przypadki:

Przypadek I: $\dfrac{1}{x-y^2}=12,\quad x=-6$.

Przypadek II: $\dfrac{1}{x-y^2}=1,\quad x=5$.

Łatwo zauważyć, że w przypadku I podany układ równań nie ma rozwiązań. W przypadku II mamy

$$5-y^2=1, \quad \text{czyli} \quad y^2=4. \quad \text{Stąd} \quad y_1=-2,\quad y_2=2.$$

Ostatecznie rozwiązaniem podanego układu równań są pary:

$$x_1=5 \ i \ y_1=-2 \qquad \text{oraz} \qquad x_2=5 \ i \ y_2=2 \quad .$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem są pary: $x_1=5 \ i \ y_1=-2$ oraz $x_2=5 \ i \ y_2=2$.

Zadanie 2.

Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1=2,\ \ a_{n+1}=4-\frac{3}{a_n}$ dla $n\in N$.
Wykazać, że (a_n) jest zbieżny, i wyznaczyć jego granicę.

Rozwiązanie.

Wykazujemy najpierw przez indukcję, że $1 < (a_n) < 3$, dla $n \in N$. Następnie stwierdzamy, że ciąg (a_n) jest rosnący gdyż:

$$a_{n+1} - a_n = 4 - \frac{3}{a_n} - a_n = \frac{(a_n - 1)(3 - a_n)}{a_n} > 0 \text{ dla } n \in N.$$

Zatem ciąg (a_n), jako rosnący i ograniczony z góry (przez liczbę 3), jest zbieżny.

Oznaczmy przez g jego granicę. Po przejściu do granicy w równości

$$a_n a_{n+1} = 4a_n - 3 \;\; (n \in N)$$

otrzymujemy równanie:

$$g * g = 4g - 3, \text{ skąd } g = 1 \text{ lub } g = 3.$$

Liczba 1 nie może być granicą obu ciągu (a_n) gdyż $a_n > 1$ dla $n \in N$ i ciąg (a_n) jest rosnący. Zatem $g = 3$.

Odpowiedź. Ciąg jest zbieżny i ma granicę równą 3.

Zadanie 3.

Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania $\sin 3x \cos 3x = \sin 2x$ w przedziale $(0;\pi)$.

Rozwiązanie

Korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta przekształcamy lewą stronę równania do postaci:

$$\frac{1}{2}\sin 6x = \sin 2x$$

$$\sin 6x = 2\sin 2x$$

W oparciu o wzór $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

przekształcamy

$$\sin 6x = \sin 3(2x) = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$$

$$3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 2\sin 2x$$

$$4\sin^3 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sin 2x\left(4\sin^2 2x - 1\right) = 0$$

$$\sin 2x = 0 \quad \vee \quad \sin^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$|\sin 2x| = \frac{1}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \quad \vee \quad \sin 2x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad \sin 2x = -\frac{1}{2} \\ x \in (0;\pi) \end{cases}$$

$$x \in \left\{ \frac{1}{12}\pi, \frac{5}{12}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi \right\}$$

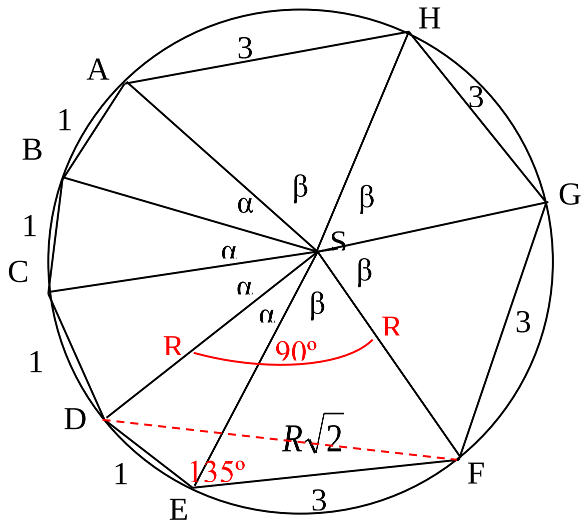
Suma rozwiązania równania: $\frac{1}{12}\pi + \frac{5}{12}\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{7}{12}\pi + \frac{11}{12}\pi = \frac{30}{12}\pi = \frac{5}{2}\pi$.

Odpowiedź. Suma rozwiązań równania w przedziale $(0;\pi)$ wynosi $\frac{5}{2}\pi$.

Zadanie 4.

Dany jest ośmiokąt wpisany w okrąg. Oblicz jego pole wiedząc, że pewne cztery kolejne jego boki mają długość równą 1, a każdy z pozostałych czterech kolejnych boków ma długość równą 3.

Rozwiązanie.



S – środek okręgu

$$4\alpha + 4\beta = 360° \quad \text{czyli} \quad \beta + \alpha = 90°$$

Czworokąt *DEFS* ma jeden z kątów prostych i odcinki *DS* i *FS* to promienie, które oznaczam przez *R*.

Z tego wynika, że $DF = R\sqrt{2}$.

Kąt *DEF* to kąt wpisany równy połowie kąta środkowego *DSF* $= 3\alpha + 3\beta = 270°$,

stąd kąt *DEF* = 135°

W trójkącie *DEF* z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$\left(R\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \cos 135°$$

$$2R^2 = 10 + 2\cdot 1\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2R^2 = 10 + 3\sqrt{2}$$

$$R^2 = 5 + 1{,}5\sqrt{2}$$

Pole trójkąta *DSF*: $P = \frac{1}{2}R^2 = 2{,}5 + 0{,}75\sqrt{2}$

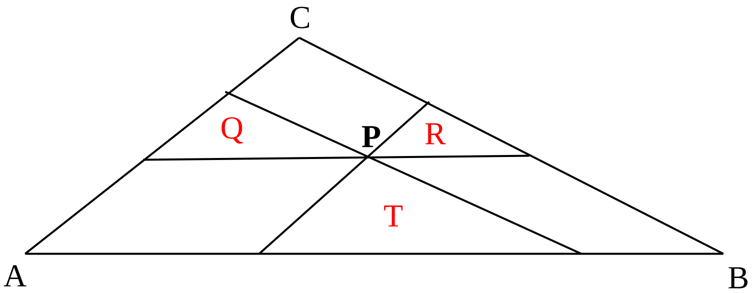
Pole trójkąta *DEF*: $P = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot \sin 135° = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Pole ośmiokąta : $P_c = 4\left(2{,}5 + 0{,}75\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right) = 10 + 6\sqrt{2}$.

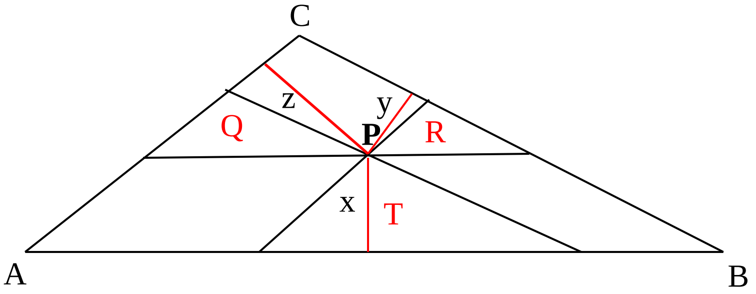
Odpowiedź. Pole ośmiokąta równe jest $10 + 6\sqrt{2}$.

Zadanie 5.

Przez punkt wewnętrzny P trójkąta ABC poprowadzono proste równoległe do wszystkich boków. Wycięły one trzy trójkąty o polach Q, R, T. Jeżeli S jest polem trójkąta ABC udowodnij, że $\sqrt{S} = \sqrt{Q} + \sqrt{R} + \sqrt{T}$.



Rozwiązanie.



$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta APB} + P_{\Delta BPC} + P_{\Delta CPA}$$

$$\frac{1}{2}|AB|h_1 = \frac{1}{2}|AB|x + \frac{1}{2}|BC|y + \frac{1}{2}|AC|z \qquad /: \ \frac{1}{2}|AB|$$

$$1 = \frac{x}{h_1} + \frac{|BC|}{|AB|} \cdot \frac{y}{h_1} + \frac{|AC|}{|AB|} \cdot \frac{z}{h_1}$$

$$|AB| \cdot h_1 = |BC| \cdot h_2, \quad |AB| \cdot h_1 = |AC| \cdot h_3$$

stąd

$$h_2 = \frac{|AB| \cdot h_1}{|BC|}, \quad h_3 = \frac{|AB| \cdot h_1}{|AC|},$$

czyli

$$1 = \frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3}$$

Trójkąty o polach S, Q, R, T są podobne, czyli

$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{h_1}\right)^2, \ \frac{R}{S} = \left(\frac{y}{h_2}\right)^2, \ \frac{T}{S} = \left(\frac{z}{h_3}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{Q}{S}} = \frac{x}{h_1}, \qquad \sqrt{\frac{R}{S}} = \frac{y}{h_2}, \qquad \sqrt{\frac{T}{S}} = \frac{z}{h_3}$$

Stąd

$$1 = \frac{x}{h_1} + \frac{y}{h_2} + \frac{z}{h_3} = \sqrt{\frac{Q}{S}} + \sqrt{\frac{R}{S}} + \sqrt{\frac{T}{S}} = \frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{S}} = \frac{\sqrt{Q} + \sqrt{R} + \sqrt{T}}{\sqrt{S}}$$

$$1 = \frac{\sqrt{Q} + \sqrt{R} + \sqrt{T}}{\sqrt{S}} \qquad /\cdot \ \sqrt{S}$$

$$\sqrt{S} = \sqrt{Q} + \sqrt{R} + \sqrt{T} \quad \textbf{c. n. d.}$$

Odpowiedź. Wykazano, że $\sqrt{S} = \sqrt{Q} + \sqrt{R} + \sqrt{T}$.