Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl styczniowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne, 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Znajdź dwa dzielniki pierwsze liczby 53^{53}-33^{33} .

Można skorzystać z artykułu o kongruencjach zamieszczonego stronach zawodów w strefie matematyki.

Rozwiązanie.

Pierwszy sposób.

Ponieważ kolejne potęgi liczb nieparzystych są nieparzyste, to na pewno różnica będzie parzysta. Stąd jednym z dzielników będzie liczba 2.

Teraz spójrzmy na ostatnie cyfry kolejnych potęg liczby 53:

…3, …9, …7, …1, …3, …9, …7, …1, …3, …9, …7, …1 itd.

Podobnie dla liczby 33 mamy

…3, …9, …7, …1, …3, …9, …7, …1, …3, …9, …7, …1 itd.

Ostatnie cyfry co cztery się powtarzają. Dla potęg zarówno 53 i 33 przy dzieleniu na 4 mamy resztę 1, więc liczby 53^{53} i 33^{33} będą kończyć się na pierwszą cyfrę takiej czwórki, czyli cyfrę 3 , a po odjęciu ostatnią cyfrą będzie 0.

Stąd drugim dzielnikiem może być np. 5.

Drugi sposób wykorzystujący własności kongruencji.

Łatwo policzyć, że $53^2 \equiv -1 \pmod{10}$, co prowadzi do relacji
$53^{52} = (53^2)^{26} \equiv (-1)^{26} \pmod{10}$, czyli $53^{52} \equiv 1 \pmod{10}$. Mnożąc ostatnią równość obustronnie przez 53 otrzymujemy $53^{53} \equiv 53 \pmod{10}$, co ostatecznie daje
$53^{53} \equiv 3 \pmod{10}$.

Podobnie $33^2 \equiv -1 \pmod{10}$, co prowadzi do relacji $33^{32} = (33^2)^{16} \equiv (-1)^{16} \pmod{10}$, czyli $33^{32} \equiv 1 \pmod{10}$. Mnożąc ostatnią równość obustronnie przez 33 otrzymujemy $33^{33} \equiv 33 \pmod{10}$, co ostatecznie daje $33^{33} \equiv 3 \pmod{10}$.

Wobec tego różnica spełnia relację $53^{53} - 33^{33} \equiv 3-3 \pmod{10}$, czyli
$53^{53} - 33^{33} \equiv 0 \pmod{10}$.

Skoro liczba dzieli się przez dziesięć, to drugim dzielnikiem może być liczba 5.

Odp. Dwa pierwsze dzielniki, to liczby 2 i 5.

Zadanie 2.

Udowodnij, że jeśli $a > b > 0 \quad i \quad a^2 + b^2 = 4ab$, to $\log(a+b) - \log(a-b) = \frac{1}{2}\log 3$.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że z założenia $a^2 + b^2 = 4ab$ po odjęciu od obu stron równania $2ab$ otrzymujemy

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2ab, \text{ czyli } (a-b)^2 = 2ab,$$

z założenia $a > b > 0$, więc $a - b = \sqrt{2ab}$.

Natomiast, jeśli do obu stron równania $a^2 + b^2 = 4ab$ dodamy $2ab$, to

$$a^2 + 2ab + b^2 = 6ab$$
$$(a+b)^2 = 6ab$$
$$a + b = \sqrt{6ab}$$

Wykorzystując równości $a - b = \sqrt{2ab}$ i $a + b = \sqrt{6ab}$ otrzymujemy

$$L = \log(a+b) - \log(a-b) = \log(\sqrt{6ab}) - \log(\sqrt{2ab}) = \log\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{2ab}} =$$
$$= \log\sqrt{3} = \frac{1}{2}\log 3 = P$$

Zadanie 3.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są odpowiednio szóstym, osiemnastym i trzydziestym ósmym wyrazem dwóch ciągów arytmetycznego i geometrycznego, to $x^{y-z} \cdot y^{z-x} \cdot z^{x-y} = 1$.

Rozwiązanie.

Niech (a_n) oznacza ciąg arytmetyczny, a (b_n) ciąg geometryczny.

Wówczas ze wzoru na n-ty wyraz tych ciągów mamy:

$$\begin{array}{lcl} x = a_6 = b_6 & & x = a_1 + 5r = b_1 q^5 \\ y = a_{18} = b_{18} & \Rightarrow & y = a_1 + 17r = b_1 q^{17} \\ z = a_{38} = b_{38} & & z = a_1 + 37r = b_1 q^{37} \end{array}$$

Stąd

$$x - y = a_1 + 5r - (a_1 + 17r) = -12r$$
$$z - x = 32r$$
$$y - z = -20r$$

Uwzględniając powyższe warunki przekształcamy lewą stronę tezy:

$$x^{y-z} \cdot y^{z-x} \cdot z^{x-y} = \left(b_1 q^5\right)^{-20r} \cdot \left(b_1 q^{17}\right)^{32r} \cdot \left(b_1 q^{37}\right)^{-12r} =$$
$$= b_1^{-20r} \cdot q^{-100r} \cdot b_1^{32r} \cdot q^{544r} \cdot b_1^{-12r} \cdot q^{-444r} = b_1^0 \cdot q^0 = 1$$

c.n.d.

Zadanie 4.

Boki trójkąta ABC mają długości $|AB| = 4$, $|AC| = |BC| = 8$. Oblicz stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC.

Rozwiązanie.

Niech punkt C_1 będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C, B_1 - spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka B, E – punktem przecięcia się symetralnej boku AC z bokiem AC F – z bokiem BC.

Dane: |AB| = 4 , |AC| = |BC| = 8

Szukane: $\frac{P_{\Delta EFC}}{P_{ABFE}} = ?$

1.Obliczam długość wysokości $|CC_1|$ z twierdzenia Pitagorasa

$$\left(|CC_1|\right)^2 + \left(|AC_1|\right)^2 = \left(|AC|\right)^2, \text{ czyli } \left(|CC_1|\right)^2 = 8^2 - 2^2$$

$$|CC_1| = \sqrt{64-4} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

2. Obliczam pole trójkąta ABC

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CC_1| \text{ , stąd } P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$$

3. Obliczam długość wysokości $|BB_1|$

$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BB_1|$, co daje równanie $4\sqrt{15} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot |BB_1|$,

a stąd $|BB_1| = \sqrt{15}$.

4. Obliczam długość odcinka $|AB_1|$ z trójkąta np. ABB_1 i z twierdzenia Pitagorasa

$$\left(|AB_1|\right)^2 + \left(|BB_1|\right)^2 = \left(|AB|\right)^2$$
$$|AB_1| = \sqrt{4^2 - 15} = 1$$

5.Obliczam długość odcinka $|B_1E|$

$|B_1E| = 4 - 1 = 3$, gdyż $|AE| = \frac{1}{2}|AC|$, E – środek odcinka AC

6. Trójkąt $\Delta BB_1C \sim \Delta EFC$, są one prostokątne i mają jeden kąt wspólny, więc stosunek długości odpowiednich boków jest stały

$$\frac{|EC|}{|B_1C|} = \frac{|EF|}{|BB_1|}\text{ , stąd } \frac{4}{7} = \frac{|EF|}{\sqrt{15}} \text{ i po przekształceniu } |EF| = \frac{4\sqrt{15}}{7}$$

7.Obliczam pole trójkąta CEF

$$P_{CEF} = \frac{1}{2}\cdot|EC|\cdot|EF| = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{4\sqrt{15}}{7} = \frac{8\sqrt{15}}{7}$$

8. Obliczam pole czworokąta ABFE

$$P_{ABFE} = P_{ABC} - P_{CEF} = 4\sqrt{15} - \frac{8\sqrt{15}}{7} = \frac{20\sqrt{15}}{7}$$

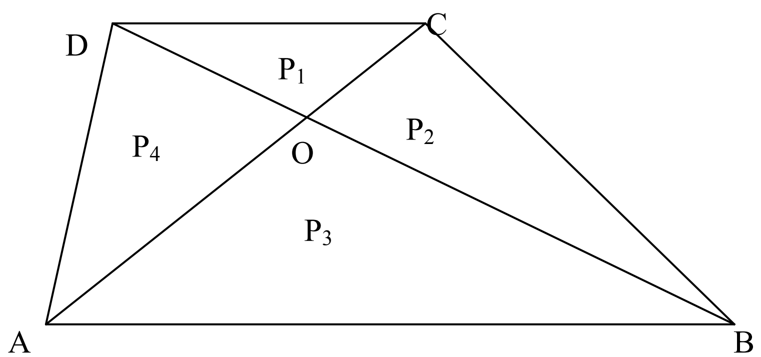
9. Obliczam szukany stosunek

$$\frac{P_{CEF}}{P_{ABFE}} = \frac{\frac{8\sqrt{15}}{7}}{\frac{20\sqrt{15}}{7}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Odp. Stosunek pól figur, na które symetralna boku AC rozcina trójkąt ABC wynosi 2 : 5.

Zadanie 5.

W trapezie poprowadzono przekątne i otrzymano cztery trójkąty o polach P_1, P_2, P_3, P_4 (tak jak na rysunku)



Wykaż, że $P_2^2 = P_1 \cdot P_3$.

Rozwiązanie.

Dowód:

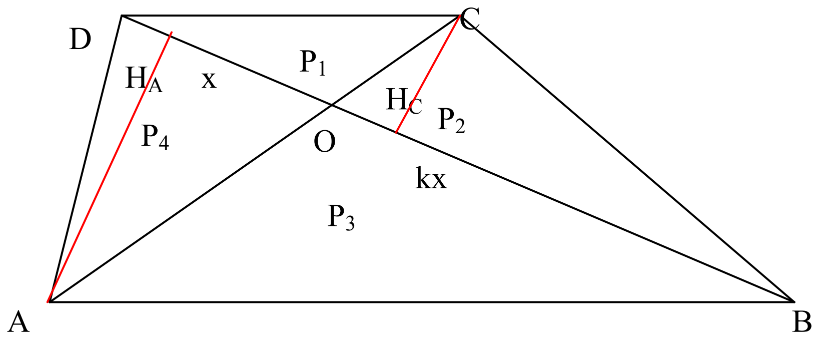
Najpierw pokażemy, że P4=P2

W trójkącie ABD i ABC wysokości poprowadzone z wierzchołków *D* oraz *C* są równe (wysokość trapezu) i oznaczmy je *h*.

Czyli $P_{ABD} = \frac{1}{2} h|AB| = P_{ABC}$. Możemy zapisać, że

$$\begin{aligned} &P_{ABD} = P_4 + P_3 \quad \textit{oraz} \quad P_{ABC} = P_2 + P_3 \\ &\textit{zatem} \quad P_4 + P_3 = P_2 + P_3 \\ &P_4 = P_2 \end{aligned}$$

Trójkąty ABO oraz DOC są podobne (z cechy KKK) . Przyjmijmy że skala ich podobieństwa wynosi *k*. W takim razie na rysunku oznaczmy długości odpowiednich boków oraz wysokości poprowadzone z wierzchołków *A* i *C*



Wtedy

$$P_4 = \frac{1}{2} H_A x \quad P_3 = \frac{1}{2} H_A kx \Rightarrow \frac{P_3}{P_4} = k$$

$$P_1 = \frac{1}{2} H_C x \quad P_2 = \frac{1}{2} H_C kx \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = k$$

$$\frac{P_3}{P_4} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_2 \cdot P_4 = P_1 \cdot P_3 \Rightarrow P_2^2 = P_1 \cdot P_3$$

c.n.d.