XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl marcowy – obowiązkowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w szkole)

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba $n^2 + n + 1$, gdzie $n \in N_+$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie:

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1$$

$$n^2 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2$$

Przypuśćmy, że $k^2 = n^2 + n + 1$. Mamy wtedy

$$n^2 < k^2 < (n+1)^2.$$

Wszystkie liczby są dodatnie ,więc po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego każdej z nich

$$n < k < n+1.$$

Ponieważ n oraz $n + 1$ to kolejne liczby naturalne, między nimi nie ma żadnej liczby naturalnej, więc nierówność nie jest prawdziwa.

A zatem $n^2 + n + 1$ nie jest kwadratem żadnej liczby naturalnej, **co należało wykazać**.

Zadanie 2.

Dla jakich wartości parametrów m, k $(m, k \in R)$, równanie $x^3 + mx + k = 0$ ma trzy pierwiastki x_1, x_2, x_3 takie, że $x_1 = x_2 = x_3 + 6$?

Rozwiązanie:

Z treści zadania równanie $x^3 + mx + k = 0$ ma trzy pierwiastki: $x_1,\ x_2 = x_1,\ x_3 = x_1 - 6$.

Stosując wzory Viete'a dla równania trzeciego stopnia $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ otrzymujemy

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = 0 \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \dfrac{c}{a} = m \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{d}{a} = -k \end{cases}$$

Podstawiają do pierwszego równania $x_1,\ x_2 = x_1,\ x_3 = x_1 - 6$ mamy

$$x_1 + x_1 + x_1 - 6 = 0$$

$$x_1 = 2$$

Pierwiastkami równania są: $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = -4$.

Parametry obliczamy z drugiego i trzeciego równania układu:

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 4 - 8 - 8 = -12 = m$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -16 = -k \;\rightarrow\; k = 16$$

Odpowiedź. $m = -12,\ k = 16$.

Zadanie 3. Korzystając z własności trójkąta uzasadnić, że $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Rozważmy trójkąt równoramienny ABC, którego kąty mają miary $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. Niech BD oznacza dwusieczną kąta przy wierzchołku B, gdzie D należy do boku AC tego trójkąta. Przyjmijmy ponadto, że $|BC| = 1$.

Wówczas

$$|BC| = |BD| = |AD| = 1.$$

Z drugiej strony z trójkątów ABD i BDC łatwo można uzasadnić, że

$$|AB| = 2 \cdot |AD| \cdot \cos 36^\circ = 2 \cdot \cos 36^\circ$$

oraz

$$|DC| = 2 \cdot |BC| \cdot \cos 72^\circ = 2 \cdot \cos 72^\circ .$$

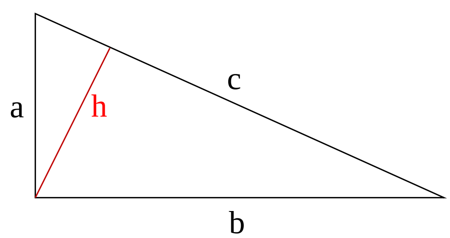
Ponieważ

$$1 = |AD| = |AC| - |DC| = |AB| - |DC| = 2\cos 36^\circ - 2 \cdot \cos 72^\circ ,$$

Stąd $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}$, **co należało wykazać.**

Zadanie 4.

Wysokość trójkąta prostokątnego ma długość h i jest 5 razu krótsza od obwodu tego trójkąta. Oblicz długość przeciwprostokątnej.



Rozwiązanie:

Niech a, b będą długościami przyprostokątnych, a c długością przeciwprostokątnej.

Z treści zadania wynika, że

$$a + b + c = 5h$$

więc

$$a + b = 5h - c.$$

Z porównania dwóch wzorów na pole tego samego trójkąta wynika, że $ab = ch$.
Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$c^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (5h - c)^2 - 2ch.$$

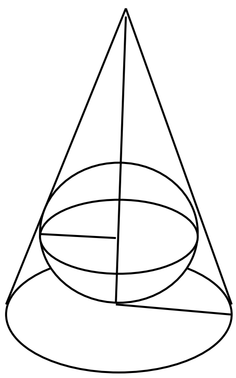
Z tej równości wynika, że $25h^2 = 12ch$ i stąd $c = \frac{25}{12}h$.

Odpowiedź. Długość przeciwprostokątnej jest równa $c = \frac{25}{12}h$.

Zadanie 5.

Pole podstawy stożka, pole powierzchni kuli wpisanej w ten stożek oraz pole powierzchni bocznej tego stożka tworzą ciąg arytmetyczny. Znajdź kąt nachylenia tworzącej stożka do podstawy.

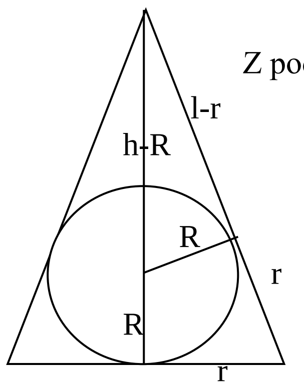
Rozwiązanie:



Pole podstawy stożka: $P_p = \pi r^2$

Pole kuli wpisanej w stożek: $P_k = 4\pi R^2$

Pole powierzchni bocznej stożka: $P_b = \pi r l$



Z podobieństwa trójkątów: $\frac{r}{h} = \frac{R}{l-r}$

$$\frac{r}{\sqrt{l^2-r^2}} = \frac{R}{l-r}$$

$$P_k = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{r(l-r)}{\sqrt{l^2-r^2}}\right)^2 = 4\pi\frac{r^2(l-r)^2}{l^2-r^2} = 4\pi\frac{r^2(l-r)}{l+r}$$

Z własności ciągu arytmetycznego: $P_p + P_b = 2P_k$

$$8\pi\frac{r^2(l-r)}{l+r} = \pi r(r+l)$$

$$8\frac{r(l-r)}{l+r} = (r+l)$$

$$8r(l-r) = (l+r)^2$$

$$8rl - 8r^2 = l^2 + 2rl + r^2$$

$$9r^2 - 6rl + l^2 = 0$$

$$(3r-l)^2 = 0$$
$$3r = l$$

$$cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{3r}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}.$$

Odpowiedź. Kąt należy odczytać z tablic dla $cos\alpha = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}}$.