Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl marcowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne, 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Dana jest koniunkcja dwóch warunków:

1. $x + y + z = 28$
2. $2x - y = 32$.

Uzasadnij, że $x > y$ jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi.

Rozwiązanie.

Z warunku pierwszego i drugiego, po dodaniu stronami, otrzymujemy

$3x + z = 60$, a stąd wyznaczamy $x = \frac{60 - z}{3}$.

Po wstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy, że $y = \frac{24 - 2z}{3}$ i w konsekwencji

$x - y = \frac{26 + z}{3} > 0$, bo z > 0. Z tego wynika, że x > y.

Zadanie 2.

Znajdź wszystkie liczby całkowite spełniające równanie: $3 \cdot |x| + 4 \cdot (-1)^x = 28$.

Rozwiązanie.

Rozważmy dwa przypadki:

1) x- liczba parzysta, całkowita.

Wtedy $(-1)^x = 1$ więc, równanie $3 \cdot |x| + 4 = 28$, czyli $3 \cdot |x| = 24$ ma rozwiązania

$$|x| = 8 \Rightarrow x = 8 \vee x = -8$$

Oba rozwiązania są parzyste, czyli spełniają równanie i założenia.

2) x – nieparzysta, całkowita.

Wtedy $(-1)^x = -1$ więc, równanie ma postać $3 \cdot |x| - 4 = 28$. Stąd $3 \cdot |x| = 32$ i otrzymujemy rozwiązania

$$|x| = \tfrac{32}{3} \Rightarrow x = \tfrac{32}{3} \vee x = -\tfrac{32}{3},$$

które nie są całkowite, czyli nie spełniają założeń.

Odpowiedź. Rozwiązaniami są liczby $x = 8$ lub $x = -8$.

Zadanie 3.

Udowodnij, że jeśli a i b są długościami przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym, a c jest długością przeciwprostokątnej, to $\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$.

Rozwiązanie.

Skoro a i b są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, a c jest długością przeciwprostokątnej, to $a,b,c \in R^+$ i $a < c$, $b < c$. Dodatkowo $c \neq b+1$, aby podstawa logarytmu była różna od jednego.

Korzystając z twierdzenia o zamianie podstawy logarytmu przekształcamy

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$

i otrzymujemy

$$\frac{1}{\log_a(c+b)} + \frac{1}{\log_a(c-b)} = 2 \cdot \frac{1}{\log_a(c+b)} \cdot \frac{1}{\log_a(c-b)}$$

Mnożąc obie strony równania przez $\log_a(c+b) \cdot \log_a(c-b)$ otrzymujemy

$$\log_a(c-b) + \log_a(c+b) = 2 .$$

Korzystając z twierdzeń o logarytmowaniu wyrażeń i z definicji logarytmu mamy:

$$\begin{aligned} &\log_a[(c+b)(c-b)] = 2 \\ &a^2 = (c-b)(c+b) \\ &a^2 = c^2 - b^2 \\ &a^2 + b^2 = c^2 \end{aligned}$$

Odwracając kolejność naszego rozumowania otrzymamy, że teza zadania jest prawdziwa.

Zadanie 4.

Wykaż, że jeżeli a, b, c są długościami boków trójkąt nie prostokątnego, a α, β są kątami wewnętrznymi leżącymi naprzeciw boków o długościach $a, b,$ to $\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$.

Rozwiązanie.

Z twierdzenia sinusów : $\sin\alpha = \frac{a}{2R}, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R},$

a z twierdzenia cosinusów

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

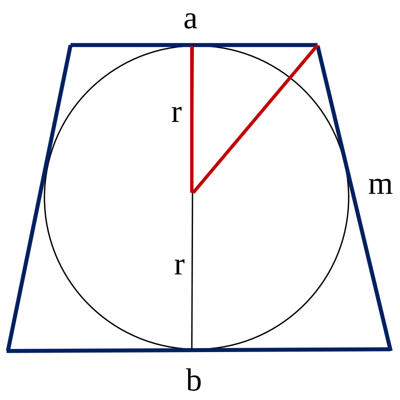
Stąd

$$\frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{\cos\alpha \cdot \sin\beta} = \frac{\frac{a}{2R} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{b}{2R}} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

Zadanie 5.

Na okręgu, którego promień ma długość r opisano trapez równoramienny. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trapezie, wiedząc, że kąt wewnętrzny pomiędzy ramieniem trapezu, a jego krótszą podstawą jest równy α .

Rozwiązanie.



Oznaczmy przez a, b długości podstaw trapezu ($a < b$), przez m długość jego ramienia, a przez d długość przekątnej.

Z równości: $\sin(180^\circ - \alpha) = \frac{2r}{m}$ oraz $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}}$ wyliczamy odpowiednio m i a

$$m = \frac{2r}{\sin\alpha} \quad \text{i} \quad a = \frac{2r}{\tan\frac{\alpha}{2}}.$$

Korzystając ze wzoru $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha}$ możemy m i a zapisać w postaci

$$m = \frac{2r}{\sin\alpha} \quad \text{i} \quad a = \frac{2r(1 + \cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Następnie z twierdzenia cosinusów $d^2 = m^2 + a^2 - 2ma\cos\alpha$, po podstawieniu m i a obliczamy

$$d = \frac{2r\sqrt{1+(\sin\alpha)^2}}{\sin\alpha}.$$

Stosując twierdzenie sinusów: $\frac{d}{\sin\alpha} = 2R$ otrzymujemy $R = \frac{r\sqrt{1+(\sin\alpha)^2}}{(\sin\alpha)^2}$.