XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl lutowy

Poziom: szkoły ponadpodstawowe

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1. Funkcja $f: R \to R$ spełnia warunek:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych x, y liczb rzeczywistych,
2. $f(1) = 1$.

Wykaż, że funkcja $f(x)$ jest: 1) nieparzysta, 2) $f(q) = q$ dla dowolnej liczby wymiernej q.

Rozwiązanie.

1) Po pierwsze zauważmy, że dla $x = y = 0$ mamy $f(0) = f(0) + f(0)$, a stąd $f(0) = 0$.

Przyjmując następnie $y = -x$ otrzymujemy

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x),$$

i stąd $f(-x) = -f(x)$.

2) Zauważmy, że

$$f(2x) = f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x),$$

$$f(3x) = f(2x + x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$$

$$f(4x) = f(3x + x) = f(3x) + f(x) = 3f(x) + f(x) = 4f(x)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(*) $\quad f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$

Teraz dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej $q = \frac{n}{m}$, gdzie $n, m \in N$ korzystając z otrzymanego wzoru mamy (*)

$$f(q) = f\left(\frac{n}{m}\right) = f(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}) = nf\left(\frac{1}{m}\right)$$

dodatkowo mamy $1 = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}$, co po wstawieniu do równania (*) daje wynik

$$1 = f(1) = f\left(\frac{m}{m}\right) = f(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \dots + \frac{1}{m}) = mf\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$1 = mf\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}$$

W rezultacie dla $n, m \in N$

$$f\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}$$

Z nieparzystości funkcji i własności $f(0) = 0$ otrzymujemy $f(q) = q$ dla dowolnej liczby wymiernej.

c.b.d.o

Zadanie 2. Wykaż, że równanie $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 1$ nie ma rozwiązania.

Rozwiązanie

Wykorzystamy wzór: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x\left[\cos 2x - \cos 4x\right] = \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \cdot \cos 4x =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\left[\sin 6x + \sin(-2x)\right] = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\left[\sin 6x + \sin 2x\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x \le \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

ponieważ $\sin\alpha \in [-1; 1]$, więc $\frac{1}{4}\sin\alpha \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$

Z powyższego wynika, że dla każdego $x \in R$ wyrażenie $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \le \frac{3}{4}$, zatem równanie $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 1$ nie ma rozwiązania.

c.n.d.

Zadanie 3. Ciąg (a_n) określony jest następująco: $a_1 = 8$, $\frac{a_{n+1} - a_n}{n+1} = 8^{n+1}$ *dla* $n \ge 1$. Obliczyć a_{2008}.

Rozwiązanie:

Z zależności rekurencyjnej dostajemy kolejno

$$a_{n+1} = a_n + (n+1)8^{n+1} = a_{n-1} + n\cdot 8^n + (n+1)8^{n+1} = a_{n-2}. + (n-1)8^{n-1} + n\cdot 8^n + (n+1)8^{n+1} = \ldots =$$

$$= a_1 + 2\cdot 8^2 + 3\cdot 8^3 + \ldots + n\cdot 8^n + (n+1)8^{n+1}.$$

Ponieważ $a_1 = 8$, *to* $a_n = 8 + 2\cdot 8^2 + 3\cdot 8^3 + \ldots + n\cdot 8^n$.

Z równości tej wynika, że

$$a_n - 8a_n = \left(8 + 2\cdot 8^2 + 3\cdot 8^3 + \ldots + n\cdot 8^n\right) - \left(8^2 + 2\cdot 8^3 + 3\cdot 8^4 + \ldots + n\cdot 8^{n+1}\right) =$$

$$= 8 + 8^2 + 8^3 + \ldots + 8^n - n\cdot 8^{n+1}.$$

Zatem $$a_n = \frac{-1}{7}\cdot\left(8\cdot\frac{1-8^n}{1-8} - n\cdot 8^{n+1}\right) = \frac{8^{n+1}(7n-1)+8}{49}.$$

Stąd w szczególności $$a_{2008} = \frac{8^{2009}\cdot 14055 + 8}{49}.$$

Odpowiedź. $a_{2008} = \dfrac{8^{2009}\cdot 14055 + 8}{49}$.

Zadanie 4. Do zbioru Z należą pierwiastki równań będące liczbami naturalnymi:

$$|x^2 - 4x - 5| = x - 5, \qquad x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0, \qquad 16^{\frac{x}{x+3}} = 4\cdot\left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}}.$$

Ze zbioru Z losujemy trzy cyfry (losowanie ze zwracaniem) układając je, w kolejności losowania, w liczbę trzycyfrową. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania:

a) liczby o różnych cyfrach,
b) liczby podzielnej przez 5.

Rozwiązanie.

$$(1) \quad |x^2 - 4x - 5| = x - 5$$

$$(1.1) \quad |x-5||x+1| = x - 5$$

Dla x < 5 lewa strona równania przyjmuje wartości nieujemne, a prawa strona wartości ujemne, czyli dla x < 5 równanie nie ma rozwiązania.

Dla $x \geq 5$ równanie (1.1) ma postać: $(x-5)(x+1) = x-5$

$$(x-5)(x+1) - (x-5) = 0$$

$$(x-5)(x+1-1) = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$x = 0 \quad lub \quad x = 5$$

$x = 0$ nie należy do rozpatrywanego zbioru.

Rozwiązaniem równania (1) jest liczba 5.

$$(2) \quad x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$$

Stosując schemat Hornera:

	1	-7	14	-8
1		1	-6	8
	1	-6	8	0

Równanie (2) ma postać: $(x-1)(x^2 - 6x + 8) = 0$

$$(x-1)(x-2)(x-4) = 0$$

$$x-1=0 \quad lub \quad x-2=0 \quad lub \quad x-4=0$$

$$x=1 \quad lub \quad x=2 \quad lub \quad x=4$$

Rozwiązaniem równania (2) są liczby 1, 2, 4.

$$(3) \qquad 16^{\frac{x}{x+3}} = 4 \cdot \left(\frac{2^x}{8}\right)^{\frac{1}{2x+5}}$$

$$2^{\frac{4x}{x+3}} = 2^2\left(2^{x-3}\right)^{\frac{1}{2x+5}}$$

$$2^{\frac{4x}{x+3}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{x-3}{2x+5}}$$

$$2^{\frac{4x}{x+3}} = 2^{\frac{x-3}{2x+5}+2}$$

$$\frac{4x}{x+3} = \frac{x-3}{2x+5} + 2$$

$$\frac{4x}{x+3} = \frac{5x+7}{2x+5}$$

$$8x^2 + 20x = 5x^2 + 22x + 21$$

$$x^2 - 2x - 21 = 0$$

$$\Delta = 256, \quad \sqrt{\Delta} = 16, \quad x_1 = \frac{2-16}{6} = \frac{-14}{6} \notin N, \ \ x_2 = \frac{2+16}{6} = 3$$

Rozwiązaniem równania (3) jest liczba 3.

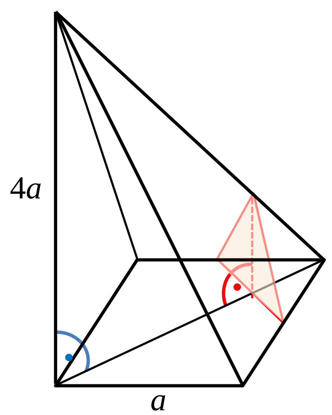
Zbiór rozwiązań $Z = \{1,2,3,4,5\}$

a) $\boldsymbol{P(A) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{5^3} = \frac{12}{25}}$

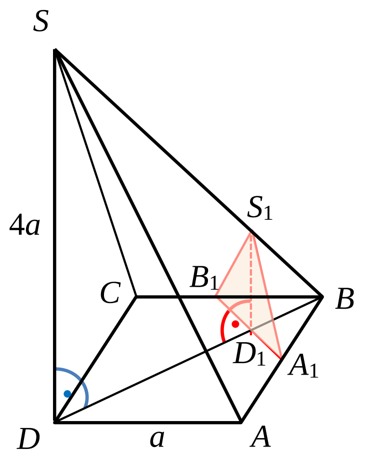
b) $\boldsymbol{P(B) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 1}{5^3} = \frac{1}{5}}$

Odpowiedź. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby o różnych cyfrach jest równe $\boldsymbol{\frac{12}{25}}$, a liczby podzielnej przez 5 jest równe $\boldsymbol{\frac{1}{5}}$.

Zadanie 5. Wyznacz pole przekroju ostrosłupa , którego podstawą jest kwadrat o boku *a*, jego wysokość jest krawędzią boczną o długości 4*a* poprowadzonego płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi podstawy wychodzące z jednego wierzchołka i równoległą do jego wysokości.



Rozwiązanie:



Przekrojem ostrosłupa płaszczyzną spełniającą warunki zadania jest $\Delta A_1B_1S_1$.

$$P_{\Delta A_1B_1S_1} = \frac{1}{2}|A_1B_1| \cdot |D_1S_1|$$

$$\Delta D_1BS_1 \sim \Delta DBS \ (kkk), więc \ \frac{|S_1D_1|}{|BD_1|} = \frac{|SD|}{|BD|}.$$

$$|BD| = a\sqrt{2}, \qquad |BD_1| = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \qquad |SD| = 4a, \qquad |A_1B_1| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \qquad |S_1D_1| = h_{prz}$$

$$zatem \ \frac{h_{prz}}{\frac{a\sqrt{2}}{4}} = \frac{4a}{a\sqrt{2}} \ => h_{prz} = \ a$$

$$P_{\Delta A_1B_1S_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}.$$

Odpowiedź. $P_{\Delta A_1B_1S_1} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.