XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl lutowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu")

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność $4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$.

Rozwiązanie:

Niech $2^x = u$, $5^x = v$, wówczas u, v są liczbami dodatnimi, zaś dana nierówność przyjmuje postać

$$u^2 - 2v^2 < u \cdot v.$$

Stąd, po przekształceniach, otrzymujemy

$$(u+v)(u-2v) < 0,$$

ale $u + v > 0$, zatem $u - 2v < 0$, czyli $\frac{u}{v} < 2$. Stąd $x > log_{0,4}2$.

Odpowiedź. $x > log_{0,4}2$.

Zadanie 2 Rozwiąż równanie: $\cos\left(\frac{4\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}x^2 = -4x - 9$.

Rozwiązanie: Przekształćmy do postaci równoważnej $\cos\left(\frac{4\pi}{x}\right) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 9$

Sprawdźmy czy to równanie ma szansę mieć jakiekolwiek rozwiązanie czyli czy jest część wspólna zbiorów wartości funkcji po lewej stronie równania i po prawej.

Zbiór wartości funkcji $y = \cos\left(\frac{4\pi}{x}\right) \quad \Rightarrow ZWF : y \in < -1, \quad 1 >$

Zbiór wartości funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 9 \quad \Rightarrow ZWF : y \in (-\infty, \quad -1 > \quad wierzchoek \quad W(-4, \quad -1)$

Czyli jedyne miejsce gdzie funkcje są równe jest w punkcie o równych wartościach, czyli dla $y = -1$.

Funkcja kwadratowa ma w tym punkcie wierzchołek czyli $y = -1$ dla $x = -4$.

$$\cos\left(\frac{4\pi}{x}\right)=-1 \quad \Rightarrow \frac{4\pi}{x}=\pi+2k\pi, \quad gdzie \quad k\in C$$

Liczymy dla jakich *x*: $$4\pi=\pi x+2k\pi x \quad \Rightarrow x=\frac{4}{2k+1}$$

$$dla \quad k=-1 \quad \Rightarrow x=-4$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem równania jest x = -4

Zadanie 3.

Obliczyć: $\dfrac{\log_6^2 3+\log_6 16}{\log_6 3\cdot\log_6 48+\log_6^2 4}$.

Rozwiązanie:

Korzystając z własności logarytmów otrzymujemy

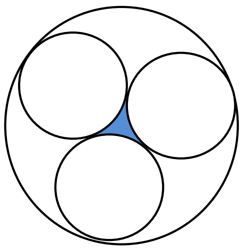
$$\frac{\log_6^2 3+\log_6 16}{\log_6 3\cdot\log_6 48+\log_6^2 4}=\frac{\log_6^2 3+4\log_6 2}{\log_6 3\cdot\log_6(3\cdot 16)+\log_6^2 4}=\frac{\log_6^2 3+4\log_6\frac{6}{3}}{\log_6 3\cdot(\log_6 3+\log_6 16)+\log_6^2 4}=$$

$$=\frac{\log_6^2 3+4(\log_6 6-\log_6 3)}{\log_6^2 3+2\log_6 3\cdot\log_6 4+\log_6^2 4}=\frac{\log_6^2 3-4\log_6 3+4}{(\log_6 3+\log_6 4)^2}=\frac{(\log_6 3-2)^2}{\log_6^2 12}=\frac{(\log_6 3-\log_6 36)^2}{\log_6^2 12}=$$

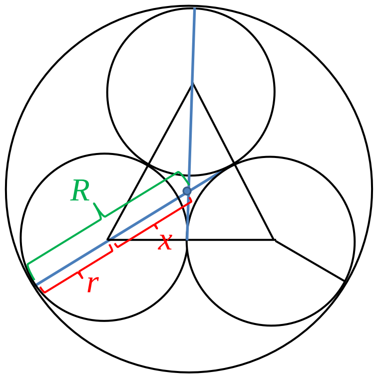
$$=\frac{\log_6^2\frac{1}{12}}{\log_6^2 12}=\frac{(-\log_6 12)^2}{\log_6^2 12}=1$$

Odpowiedź. Wartość wyrażenia równa jest 1.

Zadanie 4. Trzy równe okręgi parami zewnętrznie styczne ograniczają trójkąt krzywoliniowy (obszar zakreskowany na rysunku). Oblicz pole tego trójkąta, wiedząc, że promień okręgu opisanego na figurze utworzonej z wymienionych trzech okręgów jest równy R.

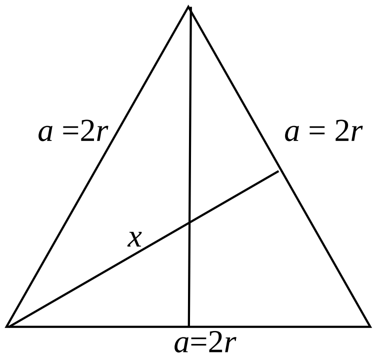


Rozwiązanie:



Środki małych okręgów tworzą trójkąt równoboczny o boku równym długości dwóch promieni: $2r$.

Pole trójkąta krzywoliniowego jest równe różnicy pola trójkąta utworzonego przez trzy środki małych okręgów i sumy pól trzech wycinków małych kół wyciętych przez trójkąt utworzony przez środki małych okręgów.



Promień R okręgu opisanego na podanej figurze jest równy sumie promienia r małego okręgu i długości odcinka x

$$x = \frac{2}{3}h\,, \qquad h = a\frac{\sqrt{3}}{2},$$

czyli

$$x = \frac{2}{3} \cdot 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Stąd $$R = r\frac{2\sqrt{3}}{3} + r = r\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$$

Wyznaczamy r: $$r = \frac{3R}{2\sqrt{3}+3} = \frac{\sqrt{3}R}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}R(2-\sqrt{3})}{4-3} = R(2\sqrt{3}-3)$$

$$r = R(2\sqrt{3}-3)$$

Wyznaczam pole trójkąta: $$P_t = (2r)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}$$

Wyznaczam pole wycinka koła. Kąty w trójkącie równobocznym mają po 60° czyli pole wycinka jest równe $\frac{1}{6}$ pola koła: $P_w = \frac{1}{6}\pi r^2$

Wyznaczam pole szukanej figury:

$$P_f = P_t - 3P_w$$

$$P_f = r^2\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{1}{6}\pi r^2 = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = R^2\left(2\sqrt{3} - 3\right)^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$P_f = R^2\left(2\sqrt{3} - 3\right)^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$P_f = 3R^2\left(7 - 4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

Odpowiedź. Pole figury jest równe $P_f = 3R^2\left(7 - 4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$.

Zadanie 5.

Wykazać, że jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi takimi, że $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = c\sqrt{c}$, to są one długościami boków trójkąta rozwartokątnego.

Rozwiązanie:

Założenie:

a, b, c - liczby dodatnie

$a\sqrt{a} + b\sqrt{b} = c\sqrt{c}$

Teza:

a, b, c są długościami boków trójkąta rozwartokątnego

Dowód:

Z równości podanej w założeniu wynika, że $a < c$ i $b < c$.

1. Aby wykazać, że liczby a, b, c są długościami boków trójkąta wystarczy udowodnić, że $a + b > c$

$$a + b = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}} > \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{c}} = \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = c.$$

2. Należy teraz udowodnić, że trójkąt o bokach a, b, c jest rozwartokątny, tzn. $a^2 + b^2 < c^2$.

Istotnie

$$a^2 + b^2 = \left(a\sqrt{a}\right)\cdot\sqrt{a} + \left(b\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{b} < \left(a\sqrt{a}\right)\cdot\sqrt{c} + \left(b\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{c} = \left(a\sqrt{a} + b\sqrt{b}\right)\cdot\sqrt{c} = \left(c\sqrt{c}\right)\cdot\sqrt{c} = c^2$$

Na podstawie punktu 1 i 2 wynika, że trójkąt o bokach długości a, b, c jest rozwartokątny.