Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl lutowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne, 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie:

$$x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}.$$

Rozwiązanie.

Przyjmując $a = x^{19}$, dane równanie możemy wówczas zapisać w postaci:

$$a + a^5 = 2a^6.$$

To równanie nie może mieć pierwiastków ujemnych, bo $L < 0$, a $P > 0$. Więc możemy rozważać tylko $a \geq 0$.

Łatwo zauważyć, że równanie to spełniają dwa pierwiastki: $a = 0$ oraz $a = 1$.

Stąd dane równanie można zapisać w postaci:

$$a(a-1)(2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) = 0$$

Ponieważ $a \geq 0$, to $2a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 > 0$.

Wynika stąd, że jedynymi rozwiązaniami równania są liczby $a = 0$ oraz $a = 1$ i w konsekwencji $x = 0$ oraz $x = 1$.

Zadanie 2.

Wykaż, że iloczyn $a \cdot b \cdot c \cdot d = 4\left(-2 + \sqrt{6}\right)$, jeśli

$$a = \sqrt{33 - 12\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$$

$$b = \log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_9 16$$

$$c = \log_6^2 2 + \log_6 3 \cdot \log_6 12$$

$$d = \sin 18° \cdot \sin 54°.$$

Rozwiązanie.

$$a = \sqrt{33 - 12\sqrt{6}} - \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{\left(3 - 2\sqrt{6}\right)^2} - \sqrt{\left(1 - \sqrt{6}\right)^2} =$$
$$= \left|3 - 2\sqrt{6}\right| - \left|1 - \sqrt{6}\right| = 2\sqrt{6} - 3 + 1 - \sqrt{6} = \sqrt{6} - 2$$

$$b = \log_{\sqrt{2}} 81 \cdot \log_9 16 = \frac{\log_2 81}{\log_2 \sqrt{2}} \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 9} = \frac{4\log_2 3}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{4}{2\log_2 3} = 16$$

$$c=\log_6^2 2+\log_6 3\cdot\log_6 12=\log_6^2 2+\log_6 3\cdot(\log_6 3+\log_6 4)=$$
$$=\log_6^2 2+\log_6^2 3+2\log_6 3\cdot\log_6 2)=(\log_6 2+\log_6 3)^2=(\log_6 6)^2=1$$

$$d=\sin 18^\circ\cdot\sin 54^\circ=\frac{2\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ\cdot\sin 54^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{\sin 36^\circ\cdot\sin 54^\circ}{2\cos 18^\circ}=$$
$$=\frac{2\sin 36^\circ\cdot\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{1}{4}$$

Zadanie 3.

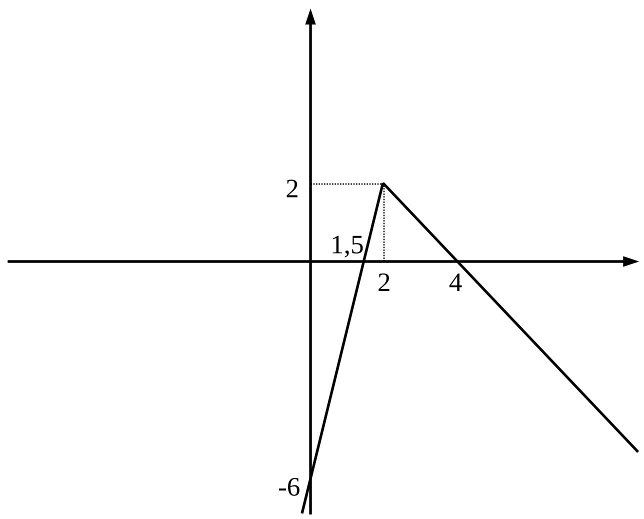
Zapis $\min(a,b)$ oznacza nie większą z liczb a i b. Np. $\min(-5,2)=-5$, $\min(2,2)=2$.
Sporządź wykres funkcji $f(x)=\min(4x-6,4-x)$ oraz wyznacz jej miejsca zerowe.

Rozwiązanie.

$$f(x)=\min(4x-6,4-x)=\begin{cases}4x-6 & \text{dla } 4x-6\le 4-x\\ 4-x & \text{dla } 4x-6>4-x\end{cases}$$

czyli
$$f(x)=\begin{cases}4x-6 & \text{dla } x\le 2\\ 4-x & \text{dla } x>2\end{cases}.$$

Wykres i wyznaczenie miejsc zerowych:



$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x-6=0$ lub $4-x=0$. Stąd

$$x=1{,}5\in\left(-\infty,2\right\rangle \quad \text{lub} \quad x=4\in(2,+\infty)$$

Odpowiedź. Funkcja posiada dwa miejsca zerowe $x=1{,}5$ i $x=4$.

Zadanie 4.

Rozstrzygnij, czy istnieje trójkąt o wysokościach : 1, $\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}$.

Rozwiązanie.

Aby rozstrzygnąć, czy istnieje trójkąt o podanych wysokościach należy sprawdzić warunek istnienia trójkąta :

suma długości dwóch krótszych boków musi być większa od długości trzeciego boku .

Niech *a, b, c* oznaczają długości boków trójkąta oraz h_a, h_b, h_c długości wysokości trójkąta opuszczone odpowiednio na boki *a, b, c*.

Dane

$h_a = 1$

$h_b = \sqrt{5}$

$h_c = 1+\sqrt{5}$

Skoro $h_a < \mathrm{h_b} < \mathrm{h_c}$, to $a > \mathrm{b} > \mathrm{c}$.

Należy sprawdzić, czy $b + c > \mathrm{a}$.

Pole trójkąta możemy wyrazić na trzy sposoby i z każdego wyznaczamy długości boków.

$$P = \tfrac{1}{2} a h_a \quad \text{, więc } a = \frac{2P}{h_a}$$

$$P = \tfrac{1}{2} b h_b \quad \text{, więc } b = \frac{2P}{h_b}$$

$$P = \tfrac{1}{2} c h_c \quad \text{, więc } c = \frac{2P}{h_c}$$

Sprawdzam, czy spełniona jest nierówność $b + c > \mathrm{a}$

$$\frac{2P}{h_b} + \frac{2P}{h_c} > \frac{2P}{h_a}$$

Dzielimy obie strony nierówności przez $2P$ i podstawiamy dane wartości wysokości.

$$\frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} > 1$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{-4} + \frac{\sqrt{5}}{5} > 1 \,|\cdot(-20)$$

$$4\sqrt{5} - 5 + 5\sqrt{5} < -20$$

$$9\sqrt{5} < -15$$

Otrzymana nierówność jest fałszywa, więc nierówność trójkąta nie jest spełniona, czyli trójkąt o danych wysokościach nie istnieje**.**

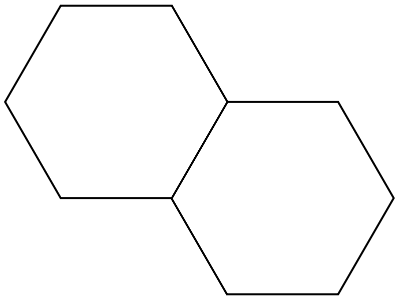
Odpowiedź. Trójkąt o danych wysokościach nie istnieje.

Zadanie 5.

Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku obrotu sześciokąta foremnego o polu 1 wokół jednego z boków?

Rozwiązanie .

Dane: $P = 1$



Powyższy rysunek przedstawia przekrój osiowy bryły

a – długość boku sześciokąta

Szukane: objętość bryły

Pole sześciokąta wyraża się wzorem $P = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, więc skoro $P = 1$, to $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 1$ czyli $a = \sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

Powstała bryła składa się z walca o promieniu podstawy $R = a\sqrt{3}$ i wysokości $H = a$ oraz dwóch identycznych stożków ściętych o promieniu podstawy górnej równej $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, dolnej $R = a\sqrt{3}$ i wysokości $h = \frac{a}{2}$, z każdego z których wydrążono stożek o promieniu podstawy równej $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ i wysokości $h = \frac{a}{2}$.

Wzór wyrażający objętość bryły:

$$V = \pi R^2 H + 2 \cdot \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + Rr + r^2\right) - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi h \mathrm{R}^2 + \frac{2}{3}\pi \mathrm{h\,R\,r}$$

$$\mathrm{V} = \frac{2}{3}\pi \mathrm{R}\left(\frac{3}{2} H\,\mathrm{R} + h\,R + h\,\mathrm{r}\right)$$

$$V=\frac{2}{3}\pi\cdot a\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\cdot a\cdot a\sqrt{3}+\frac{a}{2}\cdot a\sqrt{3}+\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi a^3\left(\frac{9}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3\cdot 6\tfrac{3}{4}=\frac{9}{2}\pi\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\right)^3=\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{3}}}\pi=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\pi$$

Odpowiedź. Objętość powstałej bryły wynosi $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\pi$.