XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl listopadowy - rozwiązania

Poziom: szkoły ponadpodstawowe

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1. Rozwiąż równanie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, gdzie $x, y, z \in N_+$.

Rozwiązanie.

Załóżmy, że trójka (x, y, z) spełnia równanie oraz $x \le y \le z$.

1. Jeśli $x > 3$, to $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{y}<\frac{1}{3}$, $\frac{1}{z}<\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1, \text{ sprzeczność}$$

2. Gdy $x = 3$, to $\frac{1}{3}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Zatem $2yz = 3(y+z)$

$$2yz-3y-3z=0$$
$$4yz-6y-6z+9=9$$
$$(2y-3)(2z-3)=9$$

$$\begin{cases} 2y-3=1 \\ 2z-3=9 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} 2y-3=3 \\ 2z-3=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ z=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=3 \\ z=3 \end{cases}$$

3. Gdy $x = 2$, to $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Zatem $yz = 2(y+z)$

$$yz-2y-2z=0$$
$$yz-2y-2z+4=4$$
$$(y-2)(z-2)=4$$

$$\begin{cases} y-2=1 \\ z-2=4 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y-2=2 \\ z-2=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ z=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=4 \\ z=4 \end{cases}$$

4. Jeżeli $x = 1$, to $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, co jest niemożliwe.

Ostatecznie przy przyjętym ustawieniu $x \le y \le z$ rozwiązaniem równania są trójki liczb: $(3,3,3)$, $(2,3,6)$, $(2,4,4)$.

Ponieważ działanie dodawania jest przemienne, więc rozwiązanie (x, y, z) może być dowolnym ustawieniem każdej z otrzymanych trójek liczb.

Odpowiedź. Rozwiązaniem (x, y, z) równania są trójki liczb: $(3,3,3)$, $(2,3,6)$, $(2,6,3)$ $(3,2,6)$, $(3,6,2)$ $(6,2,3)$, $(6,3,2)$, $(2,4,4)$, $(4,2,4)$, $(4,4,2)$.

Zadanie 2. Liczbę 2007 przedstaw w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb naturalnych. Ile rozwiązań ma to zadanie? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie.

Niech x, y będą liczbami naturalnymi dodatnimi takimi, że $x > y$. Z tego wynika, że

$$x + y > x - y > 0$$

Liczbę 2007 można przedstawić na trzy sposoby:

$$2007 = 2007 \cdot 1 = 669 \cdot 3 = 223 \cdot 9,$$

a różnicę kwadratów liczb w postaci:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y).$$

Otrzymujemy stąd alternatywę trzech układów równań:

$$\begin{cases} x + y = 2007 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y = 669 \\ x - y = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x + y = 223 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

Rozwiązując te układy dostajemy rozwiązania:

$$\begin{cases} x = 1004 \\ y = 1003 \end{cases} ; \begin{cases} x = 336 \\ y = 333 \end{cases} ; \begin{cases} x = 116 \\ y = 107 \end{cases}$$

Odpowiedź. Wynika stąd, że zadanie ma trzy powyższe rozwiązania.

Zadanie 3. Oblicz, ile jest liczb dziewięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, natomiast występują dokładnie dwie czwórki i trzy piątki.

Rozwiązanie.

1. Wybieramy miejsce dla dwóch czwórek: $\binom{9}{2} = 36$.
2. Po ustawieniu czwórek teraz wybieramy miejsce dla trzech piątek: $\binom{7}{3} = 35$.
3. Na pozostałych czterech miejscach mogą wystąpić cyfry: $\{1, 2, 3, 6, 7, 8, 9\}$. Tych możliwości będzie: $7^4 = 2401$.

Zatem liczb spełniających warunki zadania będzie:

$$\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{3}\cdot 7^4 = 36\cdot 35\cdot 2401 = 3025260$$

Odpowiedź. Liczb spełniających warunki zadania jest 3025260.

Zadanie 4. Wykaż, że jeżeli boki trójkąta mają długość odpowiednio a, b, c i spełniona jest równość $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, to jeden z kątów ma miarę 60^0.

Rozwiązanie.

Warunek $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ jest równoważny zależności

$$(a+2b+c)(a+b+c)=3(a+b)(b+c),$$

(*) $$a^2+c^2=b^2+ac.$$

Z twierdzenia cosinusów mamy:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta.$$

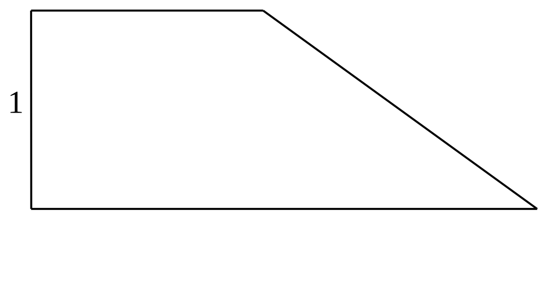
Podstawiając do równania (*), otrzymujemy $ac(2\cos\beta-1)=0$,

Skąd $\cos\beta=\frac{1}{2}$.

Zatem $\beta=60^0$, **co należało wykazać**.

Zadanie 5.

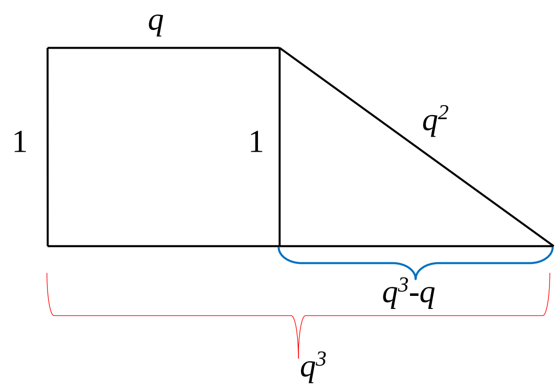
Wyznaczyć najdłuższy bok trapezu prostokątnego wiedząc, że najkrótszy bok o długości 1 jest wysokością tego trapezu i jego kolejne boki tworzą ciąg geometryczny.



Rozwiązanie.

Najkrótszy bok ma długość 1, czyli $q > 1$. Wtedy $q^3 > q^2 > q$.

Tylko taki układ boków jak na poniższym rysunku spełnia warunki zadania:



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy:

$$1^2 + (q^3 - q)^2 = (q^2)^2$$
$$1 + q^6 - 2q^4 + q^2 = q^4$$
$$(*) \qquad q^6 - 3q^4 + q^2 + 1 = 0$$

Z twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych wynika, że jedynymi pierwiastkami wymiernymi równania (*) mogą być liczby (-1) oraz 1.
Stosując schemat Hornera wyznaczamy pierwiastki równania (*). Są to liczby (-1) oraz 1.
Równanie (*) ma postać:

$$(q-1)(q+1)(q^4 - 2q^2 - 1) = 0$$

Rozwiązuję równanie :

$$q^4 - 2q^2 - 1 = 0$$
$$q^4 - 2q^2 + 1 - 2 = 0$$
$$(q^2 - 1)^2 = 2$$
$$q^2 - 1 = \sqrt{2} \qquad \vee \qquad q^2 - 1 = -\sqrt{2}$$
$$q^2 = \sqrt{2} + 1 \qquad \vee \qquad q^2 = -\sqrt{2} + 1$$
$$q = \sqrt{1+\sqrt{2}} \ \vee \ q = -\sqrt{1+\sqrt{2}} \qquad \vee \qquad \text{równanie sprzeczne}$$

Równanie (*) ma cztery rozwiązania $\left\{-\sqrt{1+\sqrt{2}},\ -1, 1, \sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$, ale tylko jedno spełnia warunek zadania $q > 1$.
Rozwiązaniem tym jest $q = \sqrt{1+\sqrt{2}}$.
Zatem najdłuższy bok ma długość $q^3 = \left(\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1} = \sqrt{7 + 5\sqrt{2}}$.

Odpowiedź. Najdłuższy bok ma długość $\sqrt{7+5\sqrt{2}}$.