XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl listopadowy

Poziom: szkoły ponadgimnazjalne

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w domu)

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1$ w zbiorze liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że x i y nie mogą być równe 0. Dane równanie jest równoważne równaniom:

- $y+x+1=xy$
- $xy-y-x+1=2$
- $y(x-1)-(x-1)=2$
- $(x-1)(y-1)=2.$

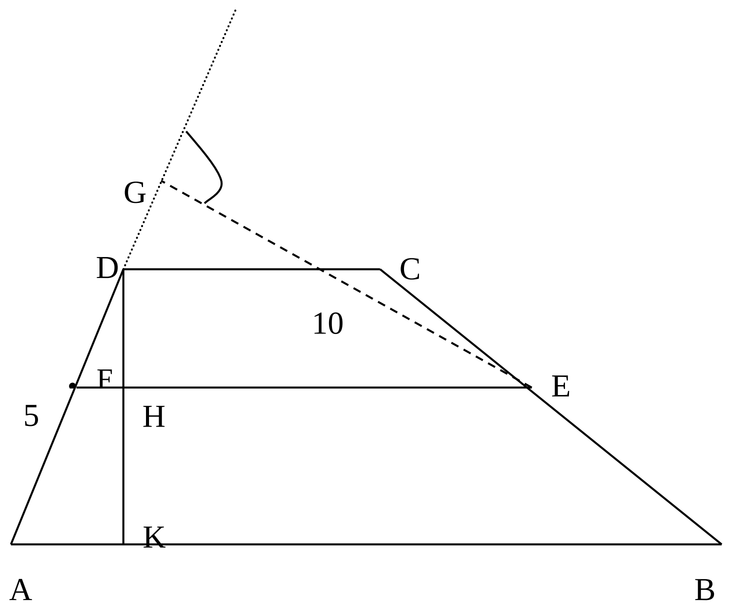
Odpowiedź. Jedynymi liczbami całkowitymi spełniającymi te równanie są liczby:

$x = 2$ i $y = 3$ lub $x = 3$ i $y = 2$.

Zadanie 2.

Długość ramienia trapezu jest równa 5, a odległość środka przeciwległego ramienia od niego jest równa 10.Znajdź pole trapezu.

Rozwiązanie:



AB = a

DC= b

DK = h

Trójkąt FEG jest podobny do trójkąta FHD (bo prostokątne oraz $\angle F$ wspólny) czyli też podobny do trójkąta AKD.

Stąd wynika stosunek odpowiednik boków w trójkątach FEG i AKD

$$\frac{5}{FE} = \frac{DK}{10}, \quad oraz \quad FE = \frac{a+b}{2}$$

$$FE \cdot DK = 50$$

$$\frac{a+b}{2} \cdot h = 50$$

$$P_{ABCD} = 50$$

Odpowiedź. Pole trapezu jest równe 50.

Zadanie 3.

Wykaż, że dla dowolnych, dodatnich liczb a, b, c, spełniających warunek $a \cdot b \cdot c = 1$ prawdziwa jest nierówność:

$$ab + bc + ac + a + b + c \geq 6$$

Rozwiązanie

Z warunku $a \cdot b \cdot c = 1$ otrzymujemy $c = \frac{1}{ab}$.

Przekształcamy lewą stronę nierówności

$$ab + bc + ac + a + b + c = ab + b \cdot \frac{1}{ab} + a \cdot \frac{1}{ab} + a + b + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + a + b + \frac{1}{ab} =$$

$$= (a + \frac{1}{a}) + (b + \frac{1}{b}) + (ab + \frac{1}{ab}) \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} + 2\sqrt{b \cdot \frac{1}{b}} + 2\sqrt{ab \cdot \frac{1}{ab}} = 2 + 2 + 2 = 6$$

Przy dowodzie skorzystano, ze związku między średnią arytmetyczną, a geometryczną.

Uwaga.

Warto również pamiętać, że $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ dla dowolnych dodatnich liczb a i b, co możemy pamiętać, że suma dodatniej liczby i jej odwrotności jest większa równa 2.

Stąd $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

Zadanie 4.

Znajdź taką najmniejszą liczbę naturalną n, aby liczby $n + 1$ oraz $n - 110$ były kwadratami liczb naturalnych.

Rozwiązanie:

Niech $n+1=x^2$ oraz $n-110=y^2$ dla pewnych liczb naturalnych x i y. Wówczas odejmując stronami otrzymujemy:

$$111=x^2-y^2=(x-y)(x+y).$$

Ale $111=3\cdot 37=1\cdot 111$ czyli:

$$\text{albo } x-y=3 \quad i \quad x+y=37, \quad \text{albo } x-y=1 \quad i \quad x+y=111.$$

Stąd mamy

$$x=20 \quad i \quad y=17 \quad \text{lub} \quad x=56 \quad i \quad y=55.$$

Odpowiedź. Najmniejszą więc liczbą n jest $n=x^2-1=399$.

Zadanie 5.

Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c i wysokościach odpowiednio równych h_a, h_b, h_c, prawdziwa jest równość:

$$(a+b+c)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=(h_a+h_b+h_c)\cdot(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}).$$

Rozwiązanie:

Niech S oznacza pole trójkąta. Wtedy

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

Stąd

$$a=\frac{2S}{h_a}, \quad b=\frac{2S}{h_b}, \quad c=\frac{2S}{h_c}.$$

$$(a+b+c)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=(\frac{2S}{h_a}+\frac{2S}{h_b}+\frac{2S}{h_c})\cdot(\frac{h_a}{2S}+\frac{h_b}{2S}+\frac{h_c}{2S})=2S\cdot(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})\cdot\frac{1}{2S}\cdot(h_a+h_b+h_c)=$$

$$=(h_a+h_b+h_c)\cdot(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c})$$

c.n.d.