Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl listopadowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne, 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Wykaż, że jeżeli pewne cztery kolejne liczny nieparzyste są pierwiastkami wielomianu o współczynnikach całkowitych, to dla każdej liczby nieparzystej wielomian przyjmuje wartość podzielną przez $3 \cdot 2^7$.

Rozwiązanie.

Po pierwsze należy zauważyć, że każda liczba nieparzysta może być zapisana w postaci $2k+1$ dla pewnej liczby całkowitej *k*, a cztery kolejne liczby nieparzyste

$$2k+1, \quad 2k+3, \quad 2k+5, \quad 2k+7$$

Z warunków zadania wynika, że wobec tego

$$W(x) = (x - 2k - 1)(x - 2k - 3)(x - 2k - 5)(x - 2k - 7)Q(x)$$

dla pewnej liczby całkowitej k i wielomianu o współczynnikach całkowitych Q(x).

Przyjmując za x dowolną liczbę nieparzystą $x = 2p+1$ otrzymujemy

$$W(2p+1) = 2^4 (p - k)(p - k - 1)(p - k - 2)(p - k - 3)Q(2p+1)$$

Wystarczy teraz zauważyć, że wśród czterech kolejnych liczb całkowitych

$$p - k, \ p - k - 1, \ p - k - 2, \ p - k - 3$$

zawsze znajduje się liczb podzielna przez trzy oraz dwie liczby parzyste, z których jedna jest podzielna przez cztery, czyli iloczyn tych liczb jest podzielny przez $3 \cdot 2^3$.

Stąd $W(2p+1) = 2^4 \cdot 3 \cdot 2^3 \cdot S(p-k)Q(2p+1) = 3 \cdot 2^7 \cdot S(p-k)Q(2p+1)$.

Zadanie 2.

Sporządź wykres funkcji: $f(x) = \sqrt{x \cdot \dfrac{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}+1} - \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}-1}}{\sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}+1} + \sqrt{\dfrac{1+x^2}{2x}-1}}}$.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Z tego, że

$$\frac{1+x^2}{2x} + 1 = \frac{(1+x)^2}{2x} \quad \text{oraz} \quad \frac{1+x^2}{2x} - 1 = \frac{(1-x)^2}{2x}$$

wynika, że

$$\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}=\frac{|1+x|}{\sqrt{2x}} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}=\frac{|1-x|}{\sqrt{2x}}.$$

Zatem wzór funkcji przybiera postać: $y=\sqrt{x\cdot\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}}=\begin{cases} x, & gdy \quad 0<x<1 \\ 1, & gdy \quad x\ge 1 \end{cases}.$

Zadanie 3.

Dla jakich wartości $n\in N$ równanie $x^{n+1}+64=x^n+64x$ ma trzy pierwiastki całkowite?

Rozwiązanie.

Równanie $x^{n+1}+64=x^n+64x$ możemy przekształcić do postaci iloczynowej:

$$\begin{aligned} &x^{n+1}+64=x^n+64x \\ &x^{n+1}-x^n-64(x-1)=0 \\ &x^n(x-1)-64(x-1)=0 \\ &(x-1)(x^n-64)=0 \end{aligned}$$

z której natychmiast otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} &x-1=0 \quad \vee \quad \mathrm{x}^{\mathrm{n}}-64=0 \\ &x=1 \qquad\ \vee \quad \mathrm{x}^{\mathrm{n}}-64=0 \end{aligned}.$$

Aby równanie wyjściowe miało trzy rozwiązania całkowite , to potrzeba i wystarcza, aby równane $x^n-64=0$ miało dwa rozwiązania całkowite, gdyż już liczba jeden jest rozwiązaniem równania wyjściowego. Równanie $x^n-64=0$ ma dwa rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą. Wtedy $n=2k$ i równanie ma postać

$(x^k)^2-64=0$ co daje rozwiązania postaci

$$x^k=8 \ \text{ lub } \ x^k=-8.$$

Dla n nieparzystych funkcja $f(x)=x^n$ jest różnowartościowa i rozwiązanie jest tylko jedno.

Jedyne możliwe postacie rozwiązań, to

$$x^k=8^1 \ \text{ lub } \ x^k=(-8)^1 \ \text{ z } \ k=1 \ \text{ i wtedy } \ n=2k=2$$

lub $$x^k=2^3 \ \text{ lub } \ x^k=(-2)^3 \ \text{ z } \ k=3 \ \text{ i wtedy } \ n=2k=6.$$

Ostatecznie tylko dla n = 2 oraz n = 6 równanie wyjściowe posiada trzy rozwiązania .

Zadanie 4.

Udowodnij, że pierwiastki równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$ są odwrotnościami pierwiastków równania $cx^2+bx+a=0$.

Rozwiązanie.

Aby równania określone w zadaniu były kwadratowe i posiadały rozwiązania muszą być spełnione warunki: a $\neq 0$, c $\neq 0$ i $\Delta = b^2-4ac > 0$.

Niech x_1, x_2 będą pierwiastkami równania $ax^2+bx+c=0$, zaś x_3, x_4 pierwiastkami równania $cx^2+bx+a=0$. Wtedy

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_3 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, \quad x_4 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$$

Dla wykazania, że x_1 i x_4 są liczbami odwrotnymi , wystarczy pokazać, że $x_1 \cdot x_4 = 1$.

$$x_1 \cdot x_4 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$$

Analogicznie stwierdzamy, że x_2 i x_3 są liczbami odwrotnymi , czyli $x_2 \cdot x_3 = 1$.

$$x_2 \cdot x_3 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$$

Zadanie 5.

W ciągu arytmetycznym sumy S_m i S_n spełniają warunek $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$. Udowodnij, że

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

Rozwiązanie.

Teza: $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$

Wiadomo, że $S_m = \frac{2a_1+(m-1)r}{2} \cdot m$ i $S_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2} \cdot n$, gdzie a_1 to pierwszy wyraz ciągu, r – różnica ciągu, a S_m i S_n są m- tą i odpowiednio n- tą sumą częściową ciągu (a_n).

Wykorzystując dany warunek założenia zadania $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ oraz wzory

$$S_m = \frac{2a_1 + (m-1)r}{2} \cdot m \quad \text{i} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

otrzymujemy związek $\frac{2a_1 + (m-1)r}{2a_1 + (n-1)r} = \frac{m}{n}$ który przekształcamy

$$2a_1 n + mnr - nr = 2a_1 m + mnr - mr$$
$$2a_1(n-m) - r(n-m) = 0$$
$$(n-m)(2a_1 - r) = 0$$
$$n = m \quad \vee \, \mathrm{a}_1 = \frac{r}{2}$$

Jeżeli $n = m$, to łatwo sprawdzić, że teza jest prawdziwa .

Jeżeli $a_1 = \frac{r}{2}$, to

$$a_m = \frac{r}{2} + (m-1)r = (2m-1)r, \quad a_n = \frac{r}{2} + (n-1)r = (2n-1)r,$$

więc

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{(2m-1)r}{(2n-1)r} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

czyli teza jest prawdziwa.