XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne 2019

Poziom ponadgimnazjalny.

Przykładowe rozwiązania zadań

Zadanie 1. Znajdź funkcję $f(x)$ spełniającą warunek: $2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$.

Rozwiązanie: Przede wszystkim musimy założyć, że $x \neq 0$.

Wstawiając w równaniu zmienną $\frac{1}{x}$ zamiast zmiennej *x* otrzymujemy zależność

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=\frac{1}{x^2}$$

co prowadzi do rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} 2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2 & |\cdot(-2) \\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=\frac{1}{x^2} & |\cdot 3 \end{cases}.$$

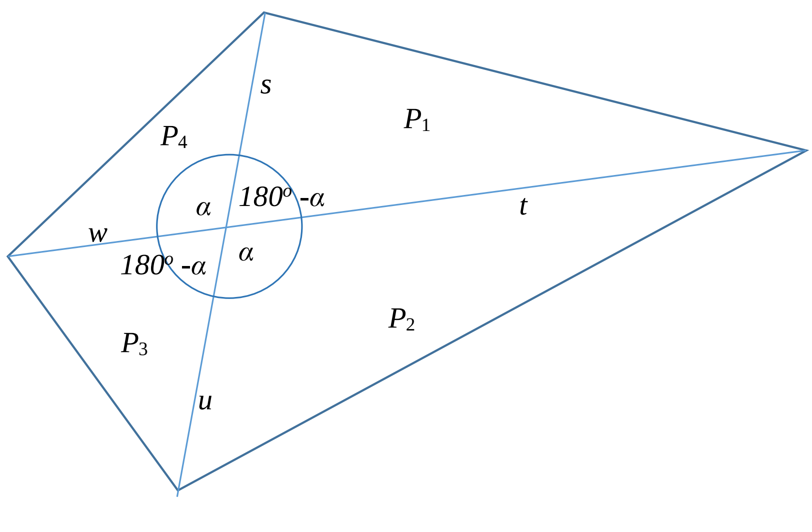
Mnożąc równanie pierwsze przez -2 oraz drugie przez 3, a następnie dodając stronami łatwo można już wyliczyć, że szukana funkcja zadana jest wzorem

$$f(x)=\frac{3-2x^4}{5x^2},$$

której dziedziną może być każdy zbiór zawarty w zbiorze $R-\{0\}$.

Zadanie 2. W czworokącie wypukłym poprowadzono przekątne, które podzieliły go na cztery trójkąty. Pola trzech z nich wynoszą: 1cm^2, 2cm^2 i 3cm^2. Ile wynosi pole czwartego trójkąta? (podaj wszystkie możliwości.)

Rozwiązanie: Rozważmy rysunek:



Zauważmy, że pola poszczególnych trójkątów wyrażają się wzorami:

$$P_1 = \frac{st\sin(180^{\circ} - \alpha)}{2} = \frac{st\sin\alpha}{2}, \qquad P_2 = \frac{tu\sin\alpha}{2}$$

$$P_3 = \frac{uw\sin(180^{\circ} - \alpha)}{2} = \frac{uw\sin\alpha}{2}, \qquad P_4 = \frac{ws\sin\alpha}{2}$$

z czego wynika, że

$$P_1 \cdot P_3 = P_2 \cdot P_4$$

Załóżmy, że nieznane jest nam pole P_1. Z powyższego równania otrzymujemy

$$P_1 = \frac{P_2 \cdot P_4}{P_3}.$$

Ponieważ $\{P_2, P_3, P_4\} = \{1,2,3\}$, to

$$P_1 = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6 \quad \text{albo} \quad P_1 = \frac{1 \cdot 3}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{albo} \quad P_1 = \frac{1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Zadanie 3. Wykaż, że jeżeli *m* i *n* są takimi liczbami całkowitymi, że rozwiązania równania $x^2 + mx + 1 - n = 0$ są niezerowymi liczbami całkowitymi, to liczba $m^2 + n^2$ nie jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie: Niech x_1 oraz x_2 będą pierwiastkami równania

$$x^2 + mx + 1 - n = 0.$$

Ze wzorów Viete'a otrzymujemy, że

$$m = -(x_1 + x_2) \quad \text{oraz} \quad n = 1 - x_1 x_2.$$

Stąd

$$m^2 + n^2 = (x_1 + x_2)^2 + (1 - x_1 x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 x_2^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$$

Ponieważ x_1 i x_2 są niezerowe i całkowite, to liczby

$$x_1^2 + 1 \quad \text{i} \quad x_2^2 + 1$$

są liczbami naturalnymi większymi od 1. Widzimy więc, że liczba $m^2 + n^2$ nie jest liczbą pierwszą.

Zadanie 4. Znajdź rozwiązania równania $\sqrt{a - x} = a - x^2$ dla $0 < a \le \frac{3}{4}$.

Rozwiązanie:
Zauważmy przede wszystkim, że muszą być spełnione warunki

$$a - x \ge 0 \quad \text{i} \quad a - x^2 \ge 0$$

Ponieważ $0 < a \leq \frac{3}{4}$ co powoduje, że $\sqrt{a} > a$, więc rozwiązania powyższych nierówności muszą spełniać warunek

$$-\sqrt{a} \leq x \leq a.$$

Podnosząc obie strony równania $\sqrt{a-x} = a - x^2$ do kwadratu, otrzymujemy

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$$

W celu rozwiązania powyższego równania można poszukiwać rozkładu otrzymanego wielomianu na iloczyn funkcji kwadratowych lub potraktować równanie jako równanie kwadratowej funkcji zmiennej *a*. Skorzystamy z drugiego sposobu.
W tym celu zapiszmy nasze równanie w postaci

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 + x = 0.$$

Wyróżnik kwadratowy powyższego równania (ze względu na zmienną *a*!) jest równy

$\Delta = (2x-1)^2 \geq 0$ co prowadzi do rozwiązań, które są związkami pomiędzy x i a:

$$a = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x-1)^2}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm |2x-1|}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x-1)}{2},$$

a po obliczeniach (tu warto się zastanowić dlaczego mogliśmy wartość bezwzględną zastąpić zwykłym nawiasem!) mają postać

$$a = x^2 - x + 1 \quad \text{lub} \quad a = x^2 + x.$$

Zacznijmy od równania pierwszego, które po przeniesieniu wszystkich wyrazów na jedną stronę ma postać

$$x^2 - x + 1 - a = 0.$$

Wyróżnik tego równania (tym razem ze względu na zmienną *x*!) jest równy $\Delta_1 = 4a - 3$. Aby nasze równanie miało rozwiązania a musi być większe lub równe $\frac{3}{4}$. Biorąc pod uwagę założenia zadania, otrzymujemy $a = \frac{3}{4}$. W tym szczególnym przypadku otrzymujemy podwójny pierwiastek $x = \frac{1}{2}$.

Wyróżnik kwadratowy drugiego równania $x^2 + x - a = 0$ (znowu ze względu na zmienną *x*!) jest równy $\Delta_2 = 1 + 4a \geq 1 > 0$. Mamy zatem rozwiązania

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} \quad \text{lub} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

Łatwo zauważyć, że rozwiązanie x_1 nie spełnia warunków zadania, ponieważ

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}\right) < -\sqrt{a}.$$

Natomiast dla drugiego pierwiastka mamy

$$0 \leq \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{4} + a} - \frac{1}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{4} + a + a^2} - \frac{1}{2} \leq \sqrt{(\frac{1}{2} + a)^2} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + a - \frac{1}{2} \leq a.$$

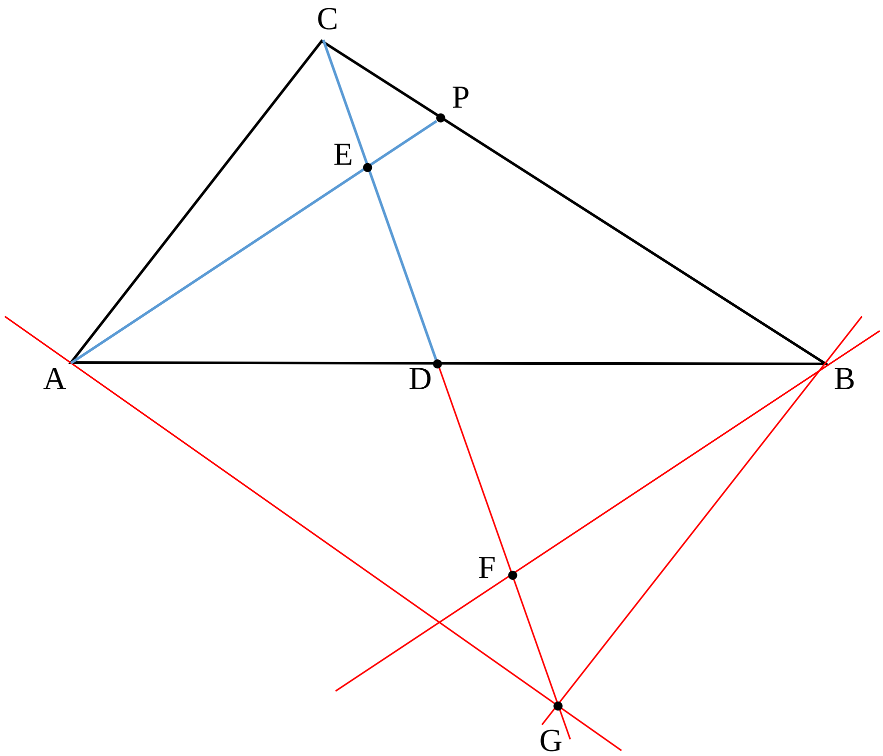
Zatem $x_2 \in [0, a]$ i jest rozwiązaniem wyjściowego równania oraz zawiera również otrzymane wcześniej rozwiązanie szczególne dla $a = \frac{3}{4}$.

Zadanie 5. W trójkącie *ABC* poprowadzono środkową *CD* i wyznaczono na niej taki punkt *E*, że

$$\frac{|CE|}{|ED|} = k .$$

Prosta przechodząca przez punkty *AE* przecina bok *BC* w punkcie *P*. Wyznacz stosunek $\frac{|CP|}{|PB|}$

Rozwiązanie:



Trzy proste (na rysunku: czerwone):

- równoległa do odcinka *BC* przechodząca przez punkt *A*,
- równoległa do odcinka *AC* przechodząca przez punkt *B*,
- równoległa do odcinka *CD* przechodząca przez punkt *C*,

przecinają się w jednym punkcie *G* tworząc równoległobok *AGBC*.

Na odcinku *DG* kładziemy punkt *F* w taki sposób, że |*FG*| = |*CE*|.

Ponieważ

$$|CD| = |DG| \text{, to } |ED| = |DF| \quad \text{oraz} \quad |EF| = 2\,|ED|.$$

Korzystając z równoległości prostych *AE* i *BF*, na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{|CP|}{|PB|} = \frac{|CE|}{|EF|} = \frac{|CE|}{2\,|ED|} = \frac{k}{2} .$$