XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Kategoria: Szkoły ponadgimnazjalne

Olsztyn, 13 kwietnia 2018

Rozwiązania

Zadanie 1 Czy z ciągu geometrycznego $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2^4}, \ldots$ można wybrać nieskończony ciąg geometryczny o sumie: a) $\frac{1}{7}$, b) $\frac{1}{5}$?

Rozwiązanie:
Nieskończony ciąg geometryczny utworzony z wybranych wyrazów danego ciągu musi mieć pierwszy wyraz postaci $a_1 = \frac{1}{2^k}$, gdzie k jest liczbą całkowitą nieujemną i iloraz $q = \frac{1}{2^s}$, gdzie s jest liczbą całkowitą dodatnią. Stąd jego suma jest równa

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2^s}} = \frac{2^{s-k}}{2^s-1}.$$

a) Równość $\frac{2^{s-k}}{2^s-1} = \frac{1}{7}$ zachodzi dla $s = k = 3$. Zatem z danego ciągu można wybrać nieskończony ciąg geometryczny

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{8^2}, \frac{1}{8^3}, \frac{1}{8^4}, \ldots$$

o sumie równej $\frac{1}{7}$.
b) Z równości

$$\frac{2^{s-k}}{2^s-1} = \frac{1}{5}$$

wynika, że

$$2^s - 1 = 5 \cdot 2^{s-k}.$$

Lewa strona jest liczbą nieparzystą, więc $s = k$. Dostajemy zatem

$$2^s - 1 = 5,$$

co nie jest możliwe. Zatem z danego ciągu nie można wybrać nieskończonego ciągu geometrycznego o sumie $\frac{1}{5}$.

Zadanie 2 Wykazać, jeśli a, b, c są różnymi od zera liczbami rzeczywistymi, to co najmniej jeden z trójmianów $ax^2 + 2bx + c$, $bx^2 + 2cx + a$, $cx^2 + 2ax + b$ ma pierwiastek rzeczywisty.

Rozwiązanie:
Przypuśćmy, że żaden z trójmianów nie ma rzeczywistego pierwiastka. Wówczas ich wyróżniki są ujemne. Dostajemy zatem następujące nierówności:

$$\begin{cases} 4b^2 - 4ac < 0 \\ 4a^2 - 4bc < 0 \\ 4c^2 - 4ab < 0 \end{cases}.$$

Po podzieleniu każdej z nich przez 4 i dodaniu dostajemy nierówność:

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc < 0.$$

Ponieważ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0$, więc

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Analogicznie

$$c^2 + b^2 \geq 2cb$$

i

$$a^2 + c^2 \geq 2ac.$$

Dodając te nierówności stronami dostajemy

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc,$$

co jest równoważne

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0.$$

Z otrzymanej sprzeczności wynika, że wszystkie wyróżniki nie mogą jednocześnie być ujemne, a to oznacza, że co najmniej jeden z trójmianów ma rzeczywisty pierwiastek.

Zadanie 3 Funkcja $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x - \sqrt{8x-16}}$ jest stała na pewnym przedziale. Wyznaczyć ten przedział.

Rozwiązanie:
Dziedzina naturalna funkcji jest określona warunkami:

$$D: \quad \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - \sqrt{8x-16} \geq 0 \end{cases}.$$

Pierwszy warunek jest równoważny $x \geq 2$ i przy tym założeniu:

$$x - \sqrt{8x-16} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{8x-16} \Leftrightarrow x^2 \geq 8x - 16 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0.$$

Zatem drugi warunek nie daje nowych ograniczeń i $D =< 2, +\infty)$. Przekształcamy teraz funkcję następująco:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x - 2 - \sqrt{8x-16} + 2} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x - 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} + 2} =$$

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{x-2} + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}|.$$

W dziedzinie funkcji $\sqrt{x-2} - \sqrt{2} \geq 0$ dla $x \geq 4$, a $\sqrt{x-2} - \sqrt{2} \leq 0$ dla $x \in< 2, 4 >$. W tym drugim przypadku $|\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| = -(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})$ i dla $x \in< 2, 4 >$ dostajemy:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| = \sqrt{x-2} - (\sqrt{x-2} - \sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Zatem funkcja f jest stała na przedziale domkniętym $< 2, 4 >$.

Zadanie 4 Na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC o polu S leżą odpowiednio takie punkty A', B', C', że

$$\frac{|BA'|}{|A'C|} = \frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{4}{5}.$$

Wyznaczyć pole trójkąta $A'B'C'$.

Rozwiązanie:
Najlepiej jest skorzystać z następującego wzoru na pole trójkąta:

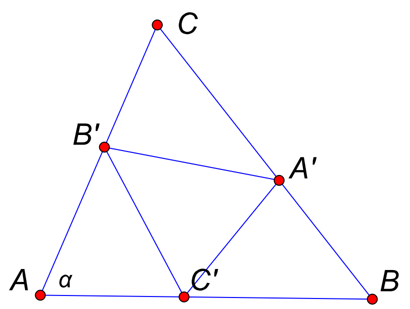
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha,$$

gdzie a, b są długościami dwóch jego boków, a α miarą kąta pomiędzy tymi bokami. Pole trójkąta $A'B'C'$ obliczymy odejmując od S pola trójkątów $AC'B'$, $BA'C'$ i $CB'A'$. Z

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} = \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{4}{5}.$$

wynika, że $|AC'| = \frac{4}{9}|AB|$ i $|AB'| = \frac{5}{9}|AC|$. Ponieważ trójkąty $AC'B'$ i ABC mają wspólny kąt (miary α) przy wierzchołku A, więc pole trójkąta $AC'B'$ jest równe:

$$S_{\triangle AC'B'} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}|AB|\cdot\frac{5}{9}|AC|\sin\alpha = \frac{20}{81}S.$$



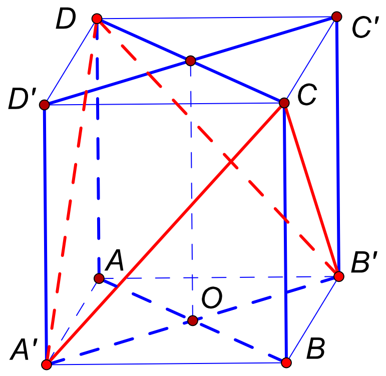
W taki sam sposób otrzymujemy $S_{\triangle BA'C'} = S_{\triangle CB'A'} = \frac{20}{81}S$. Stąd pole trójkąta $A'B'C'$

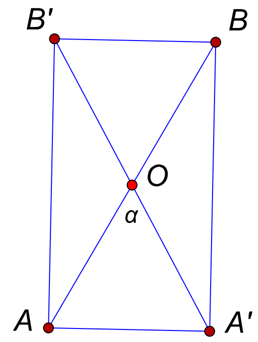
$$S_{\triangle A'B'C'} = S - 3\cdot\frac{20}{81}S = \frac{7}{27}S.$$

Zadanie 5 Bok AB kwadratu $ABCD$ obrócono o kąt ostry miary α wokół prostej łączącej środki boków AB i CD do położenia $A'B'$. Wyznaczyć objętość otrzymanego w ten sposób czworościanu $A'B'CD$ mając długość boku kwadratu równą a.

Rozwiązanie:
Jeśli w ten sam sposób obrócimy wierzchołki C, D do położenia C', D', to otrzymamy prostopadłościan $AB'BA'DC'CD'$ o wysokości $|AD| = a$, którego podstawą jest prostokąt $AB'BA'$ o przekątnych długości a, które przecinają się pod kątem α.

Zatem pole podstawy prostopadłościanu wynosi $\dfrac{a^2\sin\alpha}{2}$, a objętość prostopadłościanu $V_P = \dfrac{a^3\sin\alpha}{2}$. Objętość czworościanu $A'B'CD$ obliczamy odejmują od objętości V_P objętości





czterech czworościanów $AB'A'D$, $BB'A'C$, $CC'DB'$ i $CD'DA'$. Każdy z nich ma podstawę o polu równym połowie pola podstawy prostopadłościanu i tę samą wysokość co prostopadłościan. Stąd objętość każdego z nich jest równa $\frac{1}{6}V_P$. Zatem objętość czworościanu $A'B'CD$ wynosi

$$V_{A'B'CD} = V_P - 4 \cdot \frac{1}{6}V_P = \frac{1}{3}V_P = \frac{a^3 \sin\alpha}{6}.$$