XV Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Zadania i rozwiązania

Zadanie 1.

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p takie, że $p^2 + 14$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie:

Niech p będzie liczbą postaci:

a) $p = 3k + 1, k \in N$.

Wtedy $p^2 + 14 = (3k + 1)^2 + 14 = 9k^2 + 6k + 15 = 3(3k^2 + 2k + 5)$.
Zatem $p^2 + 14$ nie jest liczbą pierwszą.

b) $p = 3k + 2, k \in N$.

Wtedy $p^2 + 14 = (3k + 2)^2 + 14 = 9k^2 + 12k + 18 = 3(3k^2 + 4k + 6)$.
W tym przypadku również $p^2 + 14$ nie jest liczbą pierwszą.

c) Wśród liczb postaci $p = 3k, k \in N$ jedyną liczbą pierwszą jest liczba 3.

Wtedy $p^2 + 14 = 9 + 14 = 23$ i liczba 23 jest liczbą pierwszą, czyli spełnione są warunki zadania.

Odpowiedź. Jedyną taką liczbą p jest 3.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeśli liczby $a_1, a_2, \dots, a_n$ różne od zera są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

Rozwiązanie:

Z założeń zadania wynika, że

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = r$, gdzie r jest różnicą ciągu arytmetycznego (a_n).

Jeśli $r = 0$, to równość jest oczywista.

Jeśli $r \neq 0$, to

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \frac{1}{r} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) \cdot \frac{1}{r} + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{r} =$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}\right) = \frac{1}{r} \cdot \left(\frac{a_1 + (n-1)r - a_1}{a_1 a_n}\right) = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

c.n.d.

Zadanie 3.

Dana jest funkcja

$$f(x) = 4^{|x|} + 2(2m+1) \cdot 2^{|x|} + 4m^2 - 5, \quad x \in R.$$

Dla jakich wartości $m \in R$ nierówność $f(x) > 0$ jest prawdziwa dla wszystkich $x \in R$?

Rozwiązanie:

Nierówność $f(x) > 0$ jest prawdziwa dla każdej liczby rzeczywistej x wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$$t^2 + 2(2m+1) \cdot t + 4m^2 - 5 = 0, \text{ gdzie } t = 2^{|x|} \geq 1,$$

nie ma pierwiastków lub ma pierwiastki mniejsze od 1, czyli gdy spełnione są warunki:

a) $\Delta < 0$

lub

b) $\Delta = 0 \ \wedge \ t_w < 1$

lub

c) $\Delta > 0 \ \wedge \ t_w < 1 \ \wedge g(1) > 0$, gdzie $g(t) = t^2 + 2(2m+1)t + 4m^2 - 5$.

$$\Delta = 4(4m^2 + 4m + 1) - 4(4m^2 - 5) = 16m + 24$$

$$t_w = \frac{-b}{2a} = -(2m+1)$$

$$g(1) = 1 + 2(2m+1) + 4m^2 - 5 = 4m^2 + 4m - 2$$

a) $\Delta < 0 \Leftrightarrow 16m + 24 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2} \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$,

b) $\Delta = 0 \ \wedge \ t_w < 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2} \ \wedge \ m > -1 \Leftrightarrow m \in \emptyset$,

c) $\Delta > 0 \ \wedge \ t_w < 1 \wedge \ g(1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{3}{2} \ \wedge \ m > -1 \ \wedge \ 2m^2 + 2m - 1 > 0$
$\Leftrightarrow m > -\frac{3}{2} \wedge m > -1 \ \wedge \ m \epsilon \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \epsilon \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$

Inny sposób obliczenia punktu c) z wykorzystaniem wzorów Viète'a:

$$\Delta > 0 \ \wedge \ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \ \wedge \ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0$$

$$(t_1 - 1) + (t_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow t_1 + t_2 - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{-b}{a} - 2 < 0 \Leftrightarrow -2(2m+1) - 2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1,$$

$$(t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \Leftrightarrow t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 5 +$$
$$2(2m+1) + 1 > 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 2 > 0 \Leftrightarrow m \epsilon \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right).$$

Otrzymujemy zatem:

$$m > -\frac{3}{2} \ \wedge \ m > -1 \ \wedge \ m \epsilon \left(-\infty; -\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \epsilon \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$$

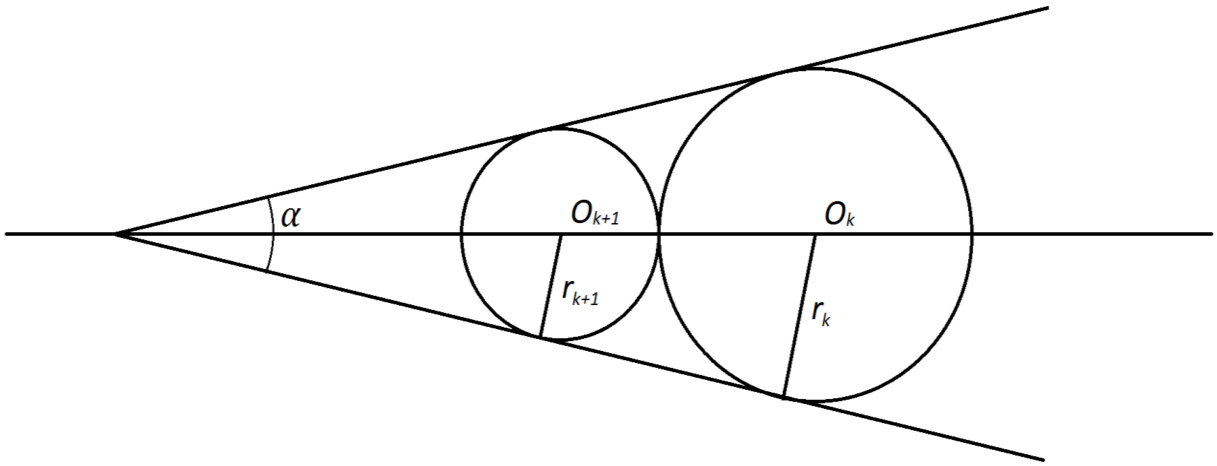
Odpowiedź.

$$m \epsilon \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$$

Zadanie 4.

W kąt ostry wpisujemy okręgi styczne do ramion kąta i do siebie. Wykaż, że promienie tych okręgów tworzą ciąg geometryczny i wyznacz zależność ilorazu tego ciągu od miary kąta.

Rozwiązanie:



Niech

O – wierzchołek kąta ostrego α

O_k – środek k-tego okręgu.

Wtedy

$$r_k = |OO_k| \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad r_{k+1} = (|OO_k| - r_k - r_{k+1}) \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Stąd

$$r_{k+1} = r_k - r_k \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - r_{k+1} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$r_{k+1}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = r_k\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$$

Zatem promienie okręgów tworzą ciąg geometryczny o ilorazie

$$\frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$$

Należy zauważyć, że począwszy od dowolnie wybranego miejsca (okręgu) mamy dwa ciągi geometryczne: malejący o podanym wyżej rozwiązaniu oraz ciąg geometryczny rosnący o ilorazie

$$\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$$

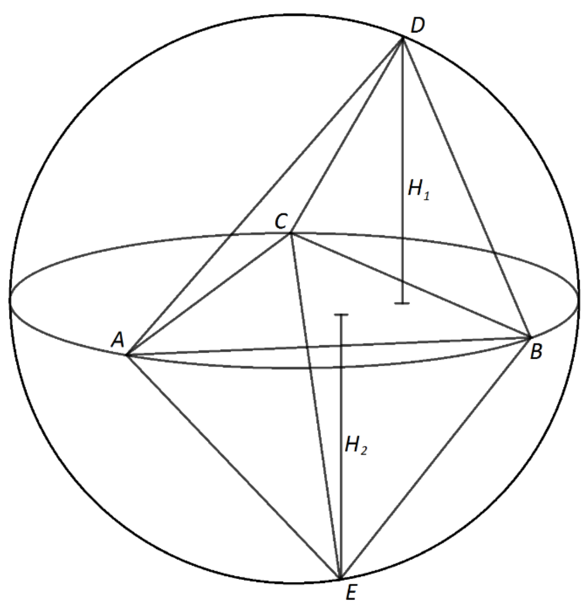
Odpowiedź. Można wskazać dwa ciągi malejący i rosnący począwszy od dowolnego miejsca.

Zadanie 5.

Dany jest zbiór wielościanów wypukłych o pięciu wierzchołkach wpisanych w sferę o promieniu jeden. Wyznacz największą objętość wielościanu w tym zbiorze.

Rozwiązanie:

Pokażemy, że wielościan wypukły o pięciu wierzchołkach ABCDE jest sumą dwóch czworościanów o wspólnej podstawie. Zauważmy najpierw, że wśród wierzchołków istnieje co najmniej jeden, z którego wychodzą 4 krawędzie. Gdyby z każdego wierzchołka wychodziły tylko 3 krawędzie, to sumując po wszystkich wierzchołkach liczbę krawędzi wychodzących z tych wierzchołków, otrzymalibyśmy liczbę 15. Nie jest to możliwe, ponieważ każda krawędź w tej sumie występuje dwa razy. Zatem suma ta powinna być parzysta. Niech A oznacza wierzchołek, z którego wychodzą 4 krawędzie AB, AC, AD, AE. Wtedy ABCD i ABCE są czworościanami o wspólnej podstawie ABC. Suma wysokości $H_1 + H_2$ jest ograniczona przez średnicę.



Aby objętość tego wielościanu była największa, ostrosłupy powinny mieć podstawę o największym polu np. S. Zatem trójkąt ABC powinien być trójkątem równobocznym wpisanym w koło wielkie sfery. Pole trójkąta równobocznego wpisanego w koło o promieniu 1 wynosi

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Objętość wielościanu wynosi

$$V = \frac{1}{3} \cdot S(H_1 + H_2) \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odpowiedź.

$$V_{max} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$