XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl grudzień
Poziom: szkoły ponadpodstawowe

Zadanie 1.

Liczby całkowite dodatnie a, b, c spełniają warunki

$$NWD(a,b,c) = 1 \quad i \quad b^2 = ac.$$

Wykaż, że liczba $a + 2b + c$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie.

Po pierwsze, najpierw należy uzasadnić, że $NWD(a,c) = 1.$

A więc, gdyby $NWD(a,c) > 1$, to dla pewnej liczby pierwszej p: $p|a$ $oraz$ $p|c.$

Z równości $b^2 = ac$ wynikałoby więc, że $p^2|b^2$, więc i też $p|b$ wbrew założeniu $NWD(a,b,c) = 1.$

Po drugie, skoro $NWD(a,c) = 1$, to z równości $b^2 = ac$ wynika, że każda z liczb a i c jest kwadratem liczby naturalnej:

Zatem niech $a = A^2$ i $c = C^2$ dla $A, C \in N_+$.

Wtedy $b^2 = A^2 \cdot C^2$, wiec też $b = A \cdot C$. W konsekwencji:

$$a + 2b + c = A^2 + 2AC + C^2 = (A + C)^2,$$

co należało wykazać.

Zadanie 2.

Rozwiąż równanie $x! + y! = z!$ w zbiorze nieujemnych liczb całkowitych.

Rozwiązanie.

Dla każdej liczby nieujemnej całkowitej n prawdziwa jest nierówność $n! \geq 1$, więc

$$z! = x! + y! \geq 2,$$

a stąd $z \geq 2$ (zależność nr 1).

Z drugiej strony $x \leq z - 1$ i $y \leq z - 1$, więc $x! \leq (z-1)!$ i $y! \leq (z-1)!$.

Zatem:

$$z \cdot (z-1)! = z! = x! + y! \leq 2 \cdot (z-1)!,$$

czyli $z \leq 2$ (zależność nr 2).

Z obu zależności: nr1 i nr 2 wynika, że $z = 2$.

Stąd dane równanie przyjmuje postać

$$x! + y! = 2.$$

Z ostatniego równania otrzymujemy, że $x \leq 1$ i $y \leq 1$.

Odpowiedź. Wynika z tego odpowiedź, że rozwiązaniami równania są następujące trójki liczb: $(x, y, z) \in \{(0,0,2), (1,0,2), (0,1,2), (1,1,2)\}$.

Zadanie 3.

Każda z trójek liczb:

$$(\log a, \log b, \log c) \text{ oraz } (\log a - \log 2b, \log 2b - \log 3c, \log 3c - \log a)$$

tworzą ciąg arytmetyczny. Udowodnij, że liczby a, b, c mogą być długościami boków trójkąta.

Rozwiązanie.

Z własności ciągu arytmetycznego

$$\begin{cases} \log b - \log a = \log c - \log b \\ (\log 2b - \log a) - (\log a - \log 2b) = (\log 3c - \log a) - (\log 2b - \log 3c) \end{cases}$$

oraz $a, b, c > 0$

$$\begin{cases} \log \dfrac{b}{a} = \log \dfrac{c}{b} \\ \log \dfrac{4b^2}{3ac} = \log \dfrac{9c^2}{2ab} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ 8b^3 = 27c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = ac \\ 2b = 3c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \dfrac{3}{2}c \\ a = \dfrac{9}{4}c \end{cases}$$

Liczby $(a, b, c) = (\frac{9}{4}c, \frac{3}{2}c, c)$ mogą być długościami boków trójkąta, gdyż spełniają warunek:

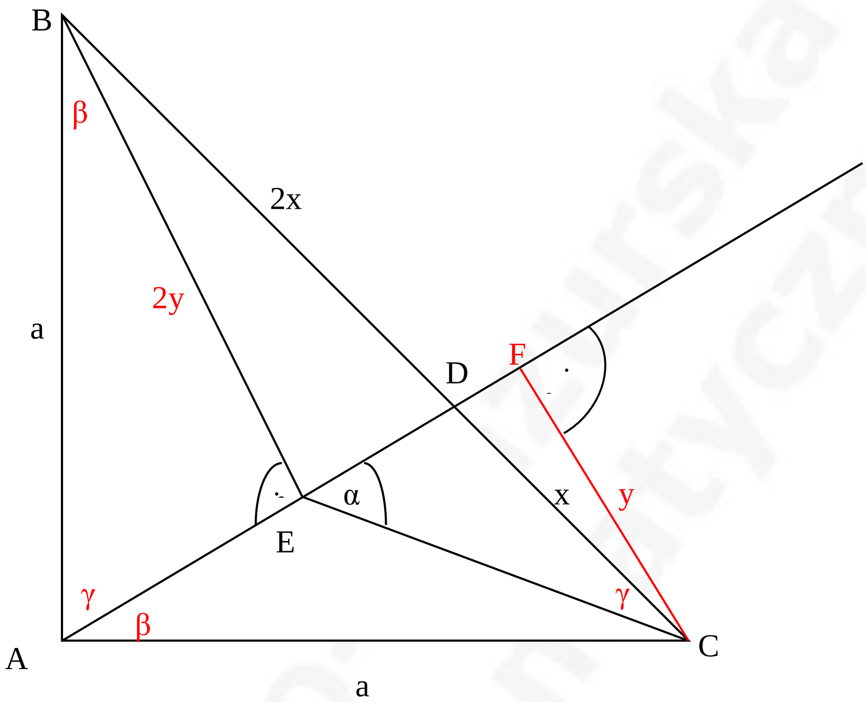
$$\frac{3}{2}c + c = \frac{5}{2}c > \frac{9}{4}c.$$

c.n.d.

Zadanie 4.

W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D należy do boku BC, przy czym BD = 2 CD. Z punktu B prowadzimy prostą prostopadłą do prostej AD , punkt E jest punktem przecięcia tych dwóch prostych. Wyznacz miarę kąta CED.

Rozwiązanie.



Narysujmy prostą prostopadłą do AD przechodzącą przez punkt C (na czerwono) , a punkt przecięcia z prostą AD oznaczmy F.

Trójkąt BED i trójkąt CFD są podobne (kąt, kąt, kąt) w skali 2. Stąd wynika że BE = 2CF (oznaczone jako 2y i y na czerwono).

W trójkącie ABC : $\gamma + \beta = 90^\circ$, więc w trójkącie prostokątnym AEB $\angle$ ABE = β,

a w trójkącie prostokątnym AFC kąt $\angle$ ACF = γ.

Kąty w trójkątach AEB i AFC są równe oraz przeciwprostokątna w obu wynosi a, czyli te trójkąty są przystające.

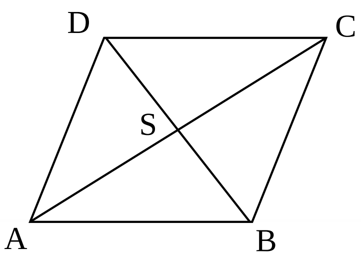
Wobec tego odcinek AE =y, a odcinek AF = 2y, co daje nam , że odcinek EF = y. Wobec tego trójkąt ETC. – prostokątny , równoramienny czyli kąt $\alpha = 45^\circ$

Odpowiedź. Kąt $\alpha = 45^\circ$.

Zadanie 5.

Punkty przecięcia linii: $x^2 - 2x - y - 8 = 0$ oraz $2x + y - 1 = 0$ są końcami przekątnej rombu . Wyznaczyć wierzchołki tego rombu oraz obliczyć długość jego boku, jeżeli pole tego rombu wynosi $30\ cm^2$.

Rozwiązanie.



Punkty A oraz C są częścią wspólną linii

$$x^2-2x-y-8=0 \; oraz \; 2x+y-1=0$$

Z drugiego równania wyznaczam $y=-2x+1$ i podstawiam do pierwszego równania. Otrzymuję:

$$x^2-2x+2x-1-8=0$$

$$x^2=9$$

$$x=3 \qquad lub \qquad x=-3$$

$$y=-5 \qquad\qquad y=7$$

$$\boldsymbol{A(3,-5)},\ \ \boldsymbol{C(-3,7)}$$

$$\overrightarrow{AC}=[6,-12], \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{6^2+(-12)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$$

$$P_r=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|$$

$$30=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot|BD|$$

$$|BD|=2\sqrt{5}$$

$$\text{czyli } |SD|=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{SD}\ jest\ prostopadły\ do\ prostej\ p{:}\ 2x+y-1=0$$

$$\vec{u}\perp p$$

$$\vec{u}=[2,1], \ \ |\vec{u}|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{SD}=k\cdot\vec{u}$$

$$\left|\overrightarrow{SD}\right|=k\cdot|\vec{u}|$$

$$\sqrt{5}=k\cdot\sqrt{5}$$

$$k=1$$

$$\text{czyli } \overrightarrow{SD}=[2,1]$$

$$S(0,1), \quad D(x_d,y_d)$$

$$x_d=2, \ \ y_d-1=1$$

$$y_d=2$$

$$\boldsymbol{D(2,2)}$$

$$B(x_b,y_b)$$

$$\frac{x_b+2}{2}=0, \quad \frac{y_b+2}{2}=1$$

$$x_b=-2, \qquad y_b=0$$

$$\boldsymbol{B(-2,0)}$$

$$\boldsymbol{|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=\sqrt{1^2+(-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}}$$

Odpowiedź. Wierzchołki: $A(3,-5), B(-2,0)$, $C(-3,7)$ i $D(2,2)$. Bok jest o długości $5\sqrt{2}$.