XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl grudniowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1. Rozwiąż nierówność:

$$(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x.$$

Rozwiązanie:

W nierówności występuje pierwiastek kwadratowy.

$$x+4 \geq 0, \qquad czyli \;\; x \geq -4.$$

Rozpatrujemy lewą stronę nierówności

$$2-4x \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$$

$$2-4x < 0 \iff x > \frac{1}{2}$$

1°. Lewa strona nierówności jest nieujemna dla $x \geq 1$. Prawa strona jest dla tych x ujemna.

Zatem dla $x \geq 1$ nierówność jest fałszywa

2°. Dla $x \in \langle -4, 1)$ lewa strona nierówności jest ujemna.

2.1. Dla $x \in \langle -4, \frac{1}{2}\rangle$ lewa stona nierówności jest ujemna, a prawa nieujemna.

Zatem nierówność jest spełniona dla każdego $x \in \langle -4\,;\, \frac{1}{2}\rangle$.

2.2. Dla $x \in \left(\frac{1}{2}\,;1\right)$ zarówno prawa jak i lewa strona nierówności są ujemne.

$$(x-1)\sqrt{x+4} < 2-4x$$

W rozpatrywanym przedziale $(x-1)$ przyjmuje wartość ujemną, zatem dzieląc obustronnie nierówność przez $(x-1)$ otrzymujemy

$$\sqrt{x+4} > \frac{2-4x}{x-1}$$

W przedziale $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ obie strony nierówności przyjmują wartości dodatnie. Możemy zatem podnieść obie strony nierówności do kwadratu.

$$\left(\sqrt{x+4}\right)^2 > \frac{(2-4x)^2}{(x-1)^2}$$

$$x+4 > \frac{16x^2-16x+4}{x^2-2x+1}$$

$$(x+4)(x^2-2x+1) > 16x^2-16x+4$$

$$x^3 - 2x^2 + x + 4x^2 - 8x + 4 - 16x^2 + 16x - 4 > 0$$

$$x^3 - 14x^2 + 9x > 0$$

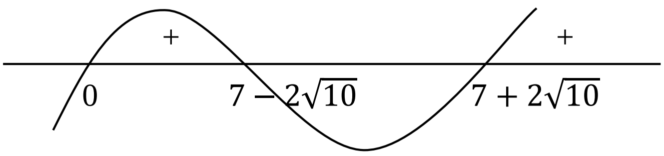
$$x(x^2 + 14x + 9) > 0$$

Wyznaczam miejsca zerowe nierówności:

$$x = 0 \ \vee \ \ x^2 + 14x + 9 = 0$$

$$\Delta = 160\, , \sqrt{\Delta} = 4\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{14 - 4\sqrt{10}}{2} = 7 - 2\sqrt{10}, \quad x_2 = \frac{14 + 4\sqrt{10}}{2} = 7 + 2\sqrt{10}$$



$$x \in \left(0\ ;\ 7 - 2\sqrt{10}\right) \cup \left(7 + 2\sqrt{10}\ ;\ +\infty\right)$$

Uwzględniając dziedzinę

$$x \in \left(\frac{1}{2}\ ;\ 7 - 2\sqrt{10}\right)$$

Odpowiedź. Ogólnie rozwiązaniem nierówności są

$$\boldsymbol{x \in \langle -4\ ;\ 7 - 2\sqrt{10})}$$

Zadanie 2. Wykaż, że jeżeli liczby dodatnie $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ , a_n$ tworzą ciąg geometryczny, to wtedy

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot\ \dots\ \cdot a_n = (a_1 \cdot a_n)^{n/2}.$$

Rozwiązanie:

Niech $\qquad a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot\ \dots\ \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n = I$

czyli $\qquad a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot\ \dots\ \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 = I$

Mnożąc obustronnie oba równania otrzymujemy

$$(a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_3 \cdot a_{n-2}) \cdot\ \dots\ \cdot (a_{n-2} \cdot a_3) \cdot (a_{n-1} \cdot a_2) \cdot (a_n \cdot a_1) = I^2$$

Z własności ciągu geometrycznego wynika, że

$$(a_1 \cdot a_n) = (a_2 \cdot a_{n-1}) = (a_3 \cdot a_{n-2}) =\ \dots\ = (a_{n-2} \cdot a_3) = (a_{n-1} \cdot a_2) = (a_n \cdot a_1)$$

Zatem

$$(a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot\ \dots\ \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) = I^2$$

$$(a_1 \cdot a_n)^n = I^2$$

Czyli

$$I = (a_1 \cdot a_n)^{n/2}$$

c.n.d.

Zadanie 3.

Długości boków trójkąta są trzema kolejnymi liczbami naturalnymi, a pole trójkąta jest równe $84m^2$. Znajdź długości tych boków (nie stosując metody prób i błędów).

Rozwiązanie:

Niech n będzie długością najkrótszego boku wówczas połowa obwodu wynosi

$$\frac{1}{2}(n+n+1+n+2)=\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}.$$

Ze wzoru Herona otrzymujemy

$$84^2=\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}\right)*\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-n\right)*\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-n-1\right)\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-n-2\right).$$

$$84^2*16=(3n+3)*(n+3)*(n+1)*(n-1)$$

$$3*28*3*28*16=3(n-1)*(n+1)*(n+1)*(n+3).$$

Przyjmijmy, że $t=n-1$:

$$t*(t+2)*(t+2)*(t+4)=12*14*14*16.$$

Pierwiastkiem tego równania jest 12, stąd $n-1=12$ i w konsekwencji $n=13$.

Odpowiedź. Szukane boki to 13, 14, 15.

Zadanie 4.

Wykazać, że jeżeli w trójkącie ABC: $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$ oraz $\angle ABC=2\cdot\angle BAC$, to $b=\sqrt{a\cdot(a+c)}$.

Rozwiązanie:

Założenie:

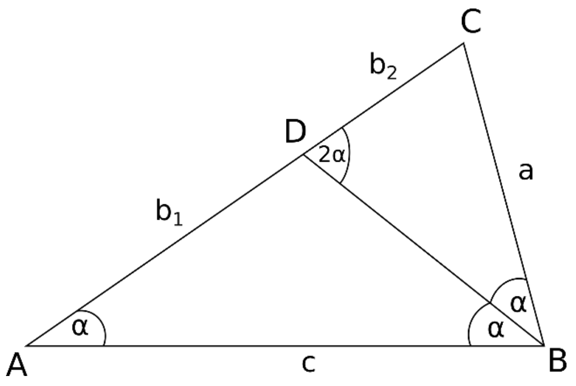
w trójkącie ABC: $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$,

$$\angle ABC=2\cdot\angle BAC$$

Teza:

$$b=\sqrt{a\cdot(a+c)}$$

Dowód:



1.

Z założenia $\angle ABC = 2 \cdot \angle BAC$, więc BD jest dwusieczną $\angle B$,
zatem z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie

$$\frac{a}{c} = \frac{b_2}{b_1} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{c \cdot b_2}{a}$$

2.

$\Delta ABC \sim \Delta BDC$ cecha (kkk)

$$\frac{a}{b} = \frac{b_2}{a} \quad \Rightarrow \quad b_2 = \frac{a^2}{b}$$

3.

$$|AC| = b = b_1 + b_2 = \frac{c \cdot b_2}{a} + b_2 = b_2 \cdot (\frac{c}{a} + 1) = \frac{a^2}{b} \cdot (\frac{c}{a} + 1) = \frac{a \cdot c}{b} + \frac{a^2}{b}$$

$$b = \frac{a \cdot c}{b} + \frac{a^2}{b} \qquad / \cdot b$$

$$b^2 = a(a+c) \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a \cdot (a+c)}\,.$$

■

Zadanie 5. Dany jest siedmiokąt foremny $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Wykaż, że

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}\,.$$

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez B punkt przecięcia się prostych zawierających boki A_1A_2 oraz A_3A_4. Zauważmy teraz, że trójkąt BA_3A_1 jest równoramienny. Rzeczywiście jeśli przez α oznaczymy kąt między kolejnymi bokami siedmiokąta , to

$$A_1A_3B = (180^\circ - \alpha) : 2 + 180^\circ - \alpha = 270^\circ - 1{,}5\alpha$$

oraz

$$A_3BA_1 = 180^\circ - 2(180^\circ - \alpha) = 2\alpha - 180^\circ .$$

Wstawiając teraz $\alpha = \frac{900^\circ}{7}$ otrzymamy, że miary kątów A_1A_3B oraz A_3BA_1 są równe. Ponadto

A_2BA_3 i A_1BA_4 są trójkątami podobnymi. Wynika stąd, że $A_1A_3 = A_1A_2 + A_2B$. Dzieląc obie strony przez $A_1A_3 \cdot A_1A_2$, otrzymujemy tezę.