XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl grudniowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie $2017^{|1-4x^2|} = \sin(\pi x)$.

Rozwiązanie:

Wiadomo, że:

- wyrażenie $|1-4x^2|$ przyjmuje wartości nieujemne dla każdego $x \in R$. Jeżeli wykładnik potęgi jest liczbą nieujemną, gdy podstawa jest liczbą większą od 1, to przedział $\langle 1; +\infty)$ jest zbiorem wartości funkcji $f(x) = 2017^{|1-4x^2|}$ będącej lewą stroną równania
- zbiorem wartości funkcji $g(x) = \sin(\pi \text{ x})$ jest przedział $\langle -1:1\rangle$.

Na podstawie powyższych informacji widać, że aby równanie posiadało rozwiązania musi ono przyjąć postać $2017^{|1-4x^2|} = 1$, a więc $|1-4x^2| = 0$, czyli $1-4x^2 = 0$

Rozwiązując równanie kwadratowe otrzymujemy $(1-2x)(\sqrt{1}+2x) = 0$

$$x = \frac{1}{2} \vee \text{ x} = -\frac{1}{2}$$

Sprawdzam, która z wyliczonych wartości x spełnia równanie $\sin(\pi x) = 1$. Dla $x = \frac{1}{2}$ równanie $\sin(\pi x) = 1$ jest spełnione, gdyż $\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 1$, a dla $x = -\frac{1}{2}$ otrzymujemy równanie sprzeczne, gdyż $\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -1$. Ostatecznie rozwiązaniem równania jest jedna liczba $x = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $x = \frac{1}{2}$

Zadanie 2.

Dla jakich wartości $x \in \langle 0, \pi \rangle$ suma nieskończonego ciągu geometrycznego o wyrazach:

$$\sin 2x \cdot \mathrm{tg}x, \cos x \cdot (1 - \cos 2x), \cos^2 x \cdot (1 - \cos 2x), \ldots$$

jest mniejsza od 3 ?

Rozwiązanie:

$$a_1 = sin2x \cdot tgx = 2sinxcosx \cdot \frac{sinx}{cosx} = 2sin^2x = sin^2x + sin^2x = 1 - cos^2x + sin^2x$$
$$= 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - cos2x$$

$a_1 = 1 - cos2x$

$a_2 = cosx(1 - cos2x)$

$a_3 = cos^2x(1 - cos2x)$

$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{cosx(1 - cos2x)}{1 - cos2x} = cosx$

Aby nieskończony ciąg geometryczny był zbieżny $|q| < 1$.

$$|q| = |cosx|$$

$$|cosx| < 1$$

$$x \in R - \left\{k\frac{\pi}{2}\right\}, gdzie\ k \in C$$

Uwzględniając warunki zadania $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Suma nieskończonego ciągu geometrycznego dla $|q| < 1$, wyraża się wzorem:

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

$$S = \frac{1 - cos2x}{1 - cosx} = \frac{2sin^2x}{1 - cosx} = \frac{2(1 - cos^2x)}{1 - cosx} = \frac{2(1 - cosx)(1 + cosx)}{1 - cosx} = 2(1 + cosx)$$

Stąd $2(1 + cosx) < 3$, czyli $1 + cosx < \frac{3}{2}$

i ostatecznie

$$cosx < \frac{1}{2}$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right), gdzie\ k \in C$$

Odpowiedź. Uwzględniając dziedzinę $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Zadanie 3.

W klasie jest 25 uczniów. Podczas klasówki ze statystyki jeden uczeń był nieobecny. Średnia ocen z klasówki wyniosła 3,5, a odchylenie standardowe 0,8. Po powrocie do szkoły, nieobecny wcześniej uczeń napisał klasówkę i otrzymał czwórkę. Oblicz średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe ocen z klasówki ze statystyki dla całej klasy.

Rozwiązanie:

Oznaczmy: $x_1, x_2, ..., x_{24}$ - oceny uczniów z klasówki

$x_{25} = 4$ - ocena ucznia nieobecnego na klasówce

$\bar{x}_0 = 3{,}5$ - średnia arytmetyczna ocen uczniów obecnych na klasówce

$\sigma_0 = 0{,}8$ - odchylenie standardowe ocen uczniów obecnych na klasówce

Średnia arytmetyczna ocen uczniów obecnych na klasówce $\bar{x}_0 = 3{,}5$

$$\bar{x}_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24}}{24} = 3{,}5,$$

stąd

$$x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24} = 3{,}5 \cdot 24 = 84.$$

Średnia arytmetyczna ocen całej klasy $\bar{x}_c$

$$\bar{x}_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_{24} + x_{25}}{25} = \frac{84 + 4}{25} = 3{,}52$$

Odchylenie standardowe ocen uczniów obecnych na klasówce

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{24}^2}{24} - (\bar{x}_0)^2} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{24}^2}{24} - 12{,}25} = 0{,}8$$

Ponosząc do kwadratu mamy:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{24}^2}{24} - 12{,}25 = 0{,}64$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{24}^2 = 309{,}36$$

Odchylenie standardowe ocen całej klasy

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{24}^2 + x_{25}^2}{25} - (\bar{x}_c)^2} = \sqrt{\frac{309{,}36 + x_{25}^2}{25} - 3{,}52^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{309{,}36 + 16}{25} - 12{,}3904} = \sqrt{13{,}0144 - 12{,}3904} = \sqrt{0{,}624} \approx 0{,}79$$

Odpowiedź: Średnia arytmetyczna całej klasy wynosi 3,52 ,

zaś odchylenia standardowe $\sqrt{0{,}624} \approx 0{,}79$.

Zadanie 4.

Wykazać, że w dowolnym trójkącie spełniona jest nierówność $p^2 \geq 27r^2$, gdzie r oznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt, a p połowę obwodu tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Niech $a+b+c=2p$. Z twierdzenia o średnich mamy:

$$\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

czyli

$$\frac{3p-(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Ponieważ $P = r \cdot p$, gdzie P - pole trójkąta, więc z wzoru Herona

$$P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ co daje } p(p-a)(p-b)(p-c)=P^2=r^2p^2$$

otrzymujemy

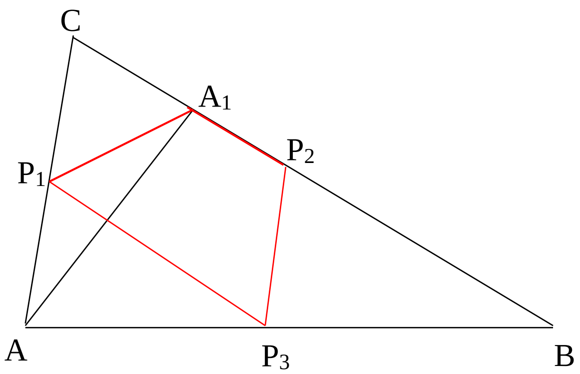
$$\frac{p}{3} \geq \sqrt[3]{r^2 p},$$

skąd $\frac{p^3}{27} \geq r^2 p$, czyli $p^2 \geq 27r^2$, co kończy dowód.

Zadanie 5.

W danym trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość AA_1 oraz zaznaczono środki boków AC – punkt P_1, boku BC – punkt P_2 i boku AB – punkt P_3.

Wykaż, że punkty A_1, P_2, P_3, P_1 leżą na jednym okręgu.



Rozwiązanie:

Aby wykazać, że punkty A_1,P_1, P_3 i P_2 leżą na jednym okręgu, należy udowodnić, że spełniony jest warunek opisania okręgu na czworokącie, czyli sumy przeciwległych kątów są równe.

Oznaczenia: kąt CAB = α , kąt ABC = β , kąt ACB = γ

- Skoro AA_1 jest wysokością trójkąta ABC, to trójkąt AA_1C jest prostokątny, w którym poprowadzono środkową AP_1 z wierzchołka kąta prostego. Z faktu, że środkowa trójkąta prostokątnego poprowadzona z wierzchołka kąta prostego jest równa połowie długości przeciwprostokątnej, wynika, że $|A_1P_1| = |P_1C| = |P_1A|$, więc trójkąt A_1P_1C jest równoramienny, gdzie kąt $CA_1P_1 = \gamma$
- Kąt $P_1A_1P_2 = 180^0 - \gamma$
- Z faktu, że odcinek łączący środki dwóch boków trójkąta jest równoległy do trzeciego boku i dwa razy od niego krótszy, wynika, że kąt $P_1P_3A = \beta$ oraz kąt $P_2P_3B = \alpha$
- Kąt $P_1P_3P_2 = 180^0 - (\alpha + \beta) = \gamma$
- Suma kątów $P_1A_1P_2$ i $P_1P_3P_2 = 180^0 - \gamma + \gamma = 180^0$
- Skoro suma miar kątów w czworokącie wynosi 360^0 i suma miar jednej pary kątów przeciwległych wynosi 180^0, więc suma dwóch pozostałych kątów przeciwległych jest równa również 180^0 , co dowodzie, że na czworokącie można opisać okrąg, czyli wskazane punkty leżą na jednym okręgu.

cnd.