

Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudniowy

Poziom: szkoły ponadgimnazjalne, 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie: $|x + |x + |x + |x||| = 0$

Rozwiązanie.

$$|x + |x + |x + |x||| = 0 \Leftrightarrow x + |x + |x + |x|| = 0$$

$$|x + |x + |x|| = -x$$

dla $x > 0 \Rightarrow$ równanie sprzeczne

$$\text{dla } x \leq 0 \Rightarrow x + |x + |x|| = -x \quad \vee \quad x + |x + |x|| = x$$

$$|x + |x|| = -2x \quad \vee \quad |x + |x|| = 0$$

$$x + |x| = -2x \quad \vee \quad x + |x| = 2x \quad \vee \quad x + |x| = 0$$

$$|x| = -3x \quad \vee \quad |x| = x \quad \vee \quad |x| = -x$$

$$x = -3x \quad \vee \quad x = 3x \quad \Downarrow \quad x = -x \quad \vee \quad x = x$$

$$(x = 0 \quad \vee \quad x = 0 \quad \vee \text{ sprzeczność } \acute{e} \vee x = 0 \vee x \in \mathfrak{R}) \wedge x \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

Odp : $x \leq 0$

Zadanie 2.

Dany jest układ równań $\begin{cases} x + y = m^2 + 2 \\ 2x + y = 2m^2 - 2m - 4 \end{cases}$. Wyznacz wszystkie liczby całkowite m ,

dla których wyrażenie $\frac{x - \frac{1}{2}y + 10}{y - 2}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie.

Rozwiązaniem danego układu równań jest $\begin{cases} x = m^2 - 2m - 6 \\ y = 2m + 8 \end{cases}$ dla każdego $m \in \mathbb{R}$.

Więc wyrażenie

$$\begin{aligned} \frac{x - \frac{1}{2}y + 10}{y - 2} &= \frac{m^2 - 3m}{2m + 6} = \frac{\frac{1}{2}m(2m + 6) - 6m}{2m + 6} = \frac{1}{2}m - \frac{6m}{2m + 6} = \frac{1}{2}m - \frac{3(2m + 6) - 18}{2m + 6} = \\ &= \frac{1}{2}m - 3 + \frac{18}{2m + 6} = \frac{1}{2}m - 3 + \frac{9}{m + 3} \end{aligned}$$

Liczba $\frac{1}{2}m - 3 + \frac{9}{m+3}$ będzie liczbą całkowitą, gdy liczba $a = \frac{1}{2}m + \frac{9}{m+3}$ jest liczbą całkowitą. Skoro

$a = \frac{1}{2}m + \frac{9}{m+3} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{18}{m+3}\right)$, to liczba a może być liczbą całkowitą, gdy $m+3=18$ lub $m+3=-18$ lub $m+3=9$ lub $m+3=-9$ lub $m+3=6$ lub $m+3=-6$ lub $m+3=3$ lub $m+3=-3$ lub $m+3=2$ lub $m+3=-2$ lub $m+3=1$ lub $m+3=-1$

Po rozwiązaniu poszczególnych równań i sprawdzeniu czy liczba a jest liczbą całkowitą dla wyznaczonej wartości m , otrzymujemy odpowiedź:

$$m \in \{-21, -12, -9, -6, -5, -4, -2, -1, 0, 3, 6, 15\}$$

Zadanie 3.

Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Rozwiązanie.

Podana nierówność jest równoważna nierówności $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9$. Wykonując działania otrzymujemy

$$L = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{a}{b} + 1 + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 = 3 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right).$$

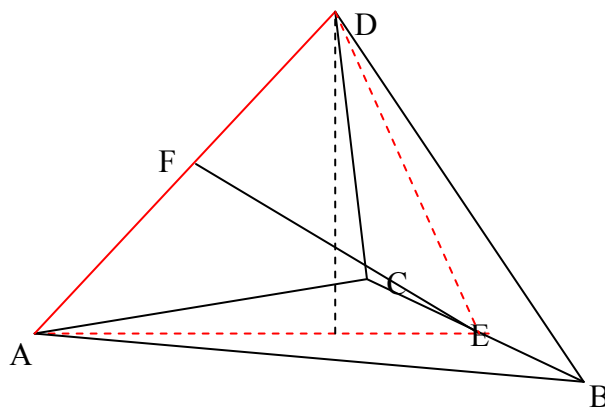
Ponieważ dla liczb dodatnich x i y mamy: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2$,

więc $L \geq 3 + 2 \cdot 3 = 9$. Zatem $L \geq P$, co kończy dowód.

Zadanie 4.

Oblicz odległość między środkami krawędzi skośnych w czworoscianie foremnym o krawędzi długości 6.

Rozwiązanie.



Krawędzie skośne to np. AD oraz CB. Punkty F i E są odpowiednio ich środkami.

Mamy obliczyć FE. Trójkąt AED jest równoramienny: ramiona $AE = DE = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ oraz

$AD = 6$. FE jest wysokością w tym trójkącie. Z Pitagorasa

$$DF^2 + FE^2 = DE^2$$

$$3^2 + FE^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$FE^2 = 27 - 9$$

$$FE = 3\sqrt{2}$$

Odp. Szukana odległość równa jest $3\sqrt{2}$.

Zadanie 5.

Oblicz pole trapezu prostokątnego, w który można wpisać okrąg, mając dane długości jego podstaw a oraz b.

Rozwiązanie.

Niech to będzie trapez ABCD, w którym $|AB|=a$, $|CD|=b$, $\sphericalangle BAD=90^\circ$. Przyjmując oznaczenia $|AD| = x$, $|BC| = y$, $|CC_1| = x$, $|C_1B| = a-b$, gdzie C_1 jest obrazem punktu C w rzucie prostokątnym na prostą AB, mamy $y^2 = (a-b)^2 + x^2$,

Stąd $y^2 - x^2 = (a-b)^2$, czyli $(y-x)(y+x) = (a-b)^2$.

Ale:

(1) $y+x = a+b$, (ponieważ w dany trapez można wpisać okrąg) więc:

$$(2) \quad y - x = \frac{(a-b)^2}{a+b}.$$

Z układu równań (1) i (2) otrzymujemy $x = \frac{2ab}{a+b}$.

Odp. $P=ab$.