Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl grudniowy
Poziom: szkoły ponadgimnazjalne, 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie: $\left|x+\left|x+\left|x+|x|\right|\right|\right|=0$

Rozwiązanie.

$\left|x+\left|x+\left|x+|x|\right|\right|\right|=0 \Leftrightarrow x+\left|x+\left|x+|x|\right|\right|=0$

$\left|x+\left|x+|x|\right|\right|=-x$

$dla \quad x>0 \Rightarrow równanie \quad sprzeczne$

$dla \quad x\le 0 \Rightarrow x+\left|x+|x|\right|=-x \quad \vee \quad x+\left|x+|x|\right|=x$

$\left|x+|x|\right|=-2x \qquad \vee \quad \left|x+|x|\right|=0$

$x+|x|=-2x \quad \vee \quad x+|x|=2x \quad \vee \quad x+|x|=0$

$|x|=-3x \quad \vee \qquad |x|=x \qquad \vee \quad |x|=-x$

$x=-3x \quad \vee \quad x=3x \quad \Downarrow \qquad x=-x \quad \vee \quad x=x$

$(x=0 \quad \vee \quad x=0 \quad \vee\, sprzeczność \vee x=0 \vee x\in\Re) \quad \wedge\, x\le 0 \Rightarrow x\le 0$

$Odp: x\le 0$

Zadanie 2.

Dany jest układ równań $\begin{cases} x+y=m^2+2 \\ 2x+y=2m^2-2m-4 \end{cases}$. Wyznacz wszystkie liczby całkowite m,

dla których wyrażenie $\dfrac{x-\frac{1}{2}y+10}{y-2}$ jest liczbą całkowitą.

Rozwiązanie.

Rozwiązaniem danego układu równań jest $\begin{cases} x=m^2-2m-6 \\ y=2m+8 \end{cases}$ dla każdego $m\in R$.

Więc wyrażenie

$$\frac{x-\frac{1}{2}y+10}{y-2}=\frac{m^2-3m}{2m+6}=\frac{\frac{1}{2}m(2m+6)-6m}{2m+6}=\frac{1}{2}m-\frac{6m}{2m+6}=\frac{1}{2}m-\frac{3(2m+6)-18}{2m+6}=$$

$$=\frac{1}{2}m-3+\frac{18}{2m+6}=\frac{1}{2}m-3+\frac{9}{m+3}$$

Liczba $\frac{1}{2}m-3+\frac{9}{m+3}$ będzie liczbą całkowitą, gdy liczba a = $\frac{1}{2}m+\frac{9}{m+3}$ jest liczbą całkowitą. Skoro

a $=\frac{1}{2}m+\frac{9}{m+3}=\frac{1}{2}\left(m+\frac{18}{m+3}\right)$, to liczba a może być liczbą całkowitą, gdy m + 3= 18 lub m+3 = –18 lub m + 3 = 9 lub m + 3 = –9 lub m + 3 = 6 lub m + 3 = –6 lub m + 3 = 3 lub m + 3 = –3 lub m + 3 = 2 lub m + 3 = –2 lub m + 3 = 1 lub m + 3 = –1

Po rozwiązaniu poszczególnych równań i sprawdzeniu czy liczba a jest liczbą całkowitą dla wyznaczonej wartości m , otrzymujemy odpowiedź:

$m \in \{-21, -12, -9, -6, -5, -4, -2, -1, 0, 3, 6, 15\}$

Zadanie 3.

Wykazać, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Rozwiązanie.

Podana nierówność jest równoważna nierówności $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\geq 9$. Wykonując działania otrzymujemy

$$L=1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+1+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1=3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right).$$

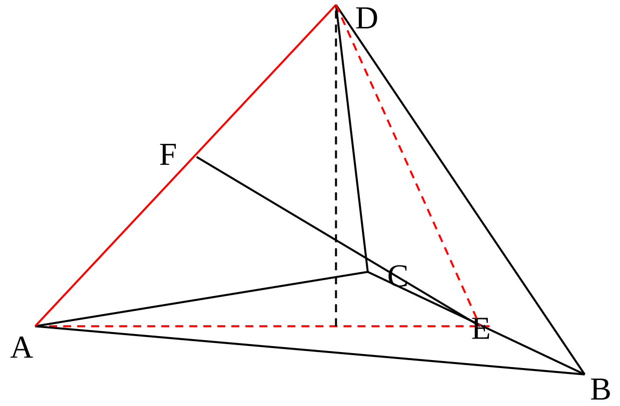
Ponieważ dla liczb dodatnich x i y mamy: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{x^2+y^2}{xy}\geq 2$,

więc $L\geq 3+2\cdot 3=9$. Zatem $L\geq P$, co kończy dowód.

Zadanie 4.

Oblicz odległość między środkami krawędzi skośnych w czworościanie foremnym o krawędzi długości 6.

Rozwiązanie.



Krawędzie skośne to np. AD oraz CB. Punkty F i E są odpowiednio ich środkami.

Mamy obliczyć FE. Trójkąt AED jest równoramienny: ramiona AE = DE = $\frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ oraz AD = 6. FE jest wysokością w tym trójkącie . Z Pitagorasa

$$DF^2 + FE^2 = DE^2$$

$$3^2 + FE^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$$

$$FE^2 = 27 - 9$$

$$FE = 3\sqrt{2}$$

Odp. Szukana odległość równa jest $3\sqrt{2}$.

Zadanie 5.

Oblicz pole trapezu prostokątnego, w który można wpisać okrąg, mając dane długości jego podstaw a oraz b.

Rozwiązanie.

Niech to będzie trapez ABCD, w którym |AB|=a, |CD|=b, ∡BAD=90º. Przyjmując oznaczenia |AD| = x, |BC| = y, $|CC_1|$ = x, $|C_1B|$ = a-b, gdzie C_1 jest obrazem punktu C w rzucie prostokątnym na prostą AB, mamy $y^2 = (a-b)^2+x^2$,

Stąd $y^2-x^2 = (a-b)^2$, czyli $(y-x)(y+x) = (a-b)^2$.

Ale:

(1) y+x = a+b, (ponieważ w dany trapez można wpisać okrąg) więc:

(2) $y - x = \frac{(a-b)^2}{a+b}$.

Z układu równań (1) i (2) otrzymujemy $x = \frac{2ab}{a+b}$.

Odp. P=ab.