XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl styczniowy

Poziom: szkoły podstawowe

Zadanie 1. Oblicz sumę wszystkich całkowitych rozwiązań nierówności $1 < (x-2)^2 < 25$?

Rozwiązanie.

Łatwo sprawdzić, że pasują tylko liczby -2, -1, 0, 4, 5, 6.

$$-2+(-1)+0+4+5+6=12$$

Odpowiedź. Suma całkowitych rozwiązań równa jest 12.

Uwaga. Można również zauważyć, że nierówności z zadania są równoważne z $1<|x-2|<5$,

czyli $|x-2|=2$ lub $|x-2|=3$ lub $|x-2|=4$.

Wtedy dla $|x-2|=2$ mamy $x=0$ lub $x=4$,

dla $|x-2|=3$ mamy $x=-1$ lub $x=5$

dla $|x-2|=4$ mamy $x=-2$ lub $x=6$.

Zadanie 2. Na statku pewnego kapitana było 31 marynarzy o średniej wieku 23 lata. Jeśli doliczymy wiek kapitana, to średnia wieku załogi wzrośnie do 24 lat. Ile lat miał kapitan?

Rozwiązanie.

Niech x będzie liczbą lat kapitana.

Suma wieku kapitana i 31 marynarzy równa jest $x+31\cdot 23$.

Wówczas otrzymujemy równanie średniego wieku

$$(x+31\cdot 23):32=24$$

$$x+31\cdot 23=32\cdot 24$$

$$x=32\cdot 24-31\cdot 23$$

Stąd $x = 55$.

Uwaga. Możemy policzyć x bez wykonywania mnożenia dużych liczb:

$$x=32\cdot 24-31\cdot 23=31\cdot 24-31\cdot 23+24=31\cdot(24-23)+24=31+24=55$$

Odpowiedź. Kapitan ma 55 lat.

Zadanie 3. Do sklepu przywieziono 250 bombek choinkowych ręcznie malowanych. Ustalono cenę sprzedaży 12 zł za sztukę. Po sprzedaniu 20% liczby bombek zauważono, że część popękała w czasie transportu. Odłożono popękane bombki. Żeby uzyskać zaplanowany przychód, pozostałe sprzedano po 16 zł za sztukę. Ile bombek było popękanych? Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie.

$0{,}2 \cdot 250 = 50$ – sprzedane bombki

$250 - 50 = 200$ – zostało do sprzedania

$200 \cdot 12 = 2400$ – tyle powinien wynieść dochód

$2400 : 16 = 150$ – tyle bombek sprzedano po 16 zł

$200 - 150 = 50$ – tyle bombek popękało

Odpowiedź: Było 50 popękanych bombek.

Zadanie 4. W układzie współrzędnych zaznacz wszystkie punkty, których współrzędne są liczbami naturalnymi spełniającymi jednocześnie oba warunki: NWD(x, y) = 1, NWW(x, y) = 3p, gdzie *p* jest parzystą liczbą pierwszą. Połącz te punkty w pewien wielokąt, a następnie oblicz jego pole. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie.

Zauważmy, że jedyną parzystą liczbą pierwszą jest $p = 2$, więc

$$\text{NWD}(x, y) = 1, \quad \text{NWW}(x, y) = 6$$

Mamy 4 możliwości

$$x = 6 \quad y = 1$$

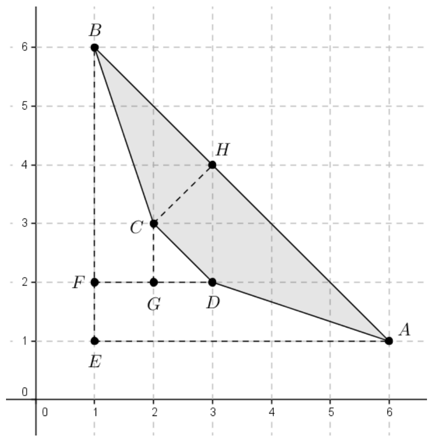
$$x = 1 \quad y = 6$$

$$x = 2 \quad y = 3$$

$$x = 3 \quad y = 2$$

Otrzymany wielokąt jest czworokątem o wierzchołkach:

$$A = (6, 1),\ B = (1,6),\ C = (2, 3),\ D = (3, 2)$$



Pole czworokąta możemy obliczyć:

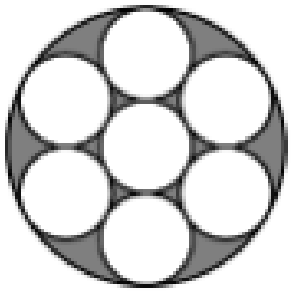
$P_{ABCD} = P_{AEB} – (P_{EFDA} + P_{CGD} + P_{FBCG})$

$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 - [\frac{1}{2} \cdot (5 + 2) \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (4 + 1) \cdot 1] = \frac{25}{2} - [\frac{7}{2} + \frac{1}{2} + \frac{5}{2}] = \frac{25}{2} - \frac{13}{2} =$

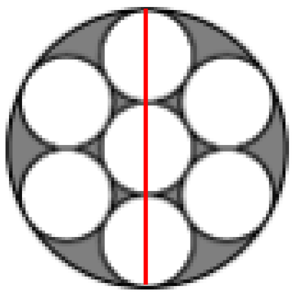
$$= \frac{12}{2} = 6j^2$$

Odpowiedź: Pole wielokąta *ABCD* jest równe 6 j^2.

Zadanie 5. Każde z małych kół na rysunku ma promień równy jeden. Najbardziej wewnętrzny okrąg jest styczny do sześciu otaczających go okręgów, a każdy z tych okręgów jest styczny do dużego koła i sąsiadujących z nim małych kół. Znajdź pole obszaru zacieniowanego.



Rozwiązanie.



Średnica D dużego okręgu równa jest sumie trzech średnic wewnętrznych okręgów

$$D = 3d = 6, \text{ a promień } \quad R = 3$$

Pole dużego koła $P = \pi R^2 = \pi 3^2 = 9\pi$, a pole każdego małego koła $P_m = \pi r^2 = \pi 1^2 = \pi$.

Wobec tego pole zacieniowanego obszaru równe jest

$$P - 7P_m = 9\pi - 7\pi = 2\pi$$

Odpowiedź. Pole zacieniowanego obszaru równe jest 2π.