XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl styczniowy

Poziom: szkoły podstawowe klasy 1-7

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.

Wykaż, że liczba $4^{52} + 2^{103} + 4^{51}$ jest podzielna przez 7.

Rozwiązanie:

$4^{52} = 2^{104}$

$4^{51} = 2^{102}$

Stąd

$$4^{52} + 2^{103} + 4^{51} = 2^{104} + 2^{103} + 2^{102} = 2^{102}\,(2^2 + 2 + 1) = 2^{102} * 7$$

Odpowiedź. Liczba $4^{52} + 2^{103} + 4^{51}$ jest podzielna przez 7.

Zadanie 2.
Jeśli do liczby dwucyfrowej *a* dopiszemy na początku cyfrę 5, to otrzymamy liczbę o 234 mniejszą od liczby, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na końcu liczby *a*.
Wyznacz liczbę *a*.

Rozwiązanie:

500 + a – liczba, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na początku liczby *a*

10a + 5 – liczba, którą otrzymamy po dopisaniu cyfry 5 na końcu liczby *a*

$$10a + 5 - (500 + a) = 234$$

$$10a + 5 - 500 - a = 234$$

$$9a = 729$$

$$a = 81$$

Odpowiedź. Szukana liczba dwucyfrowa *a* to 81.

Zadanie 3.
Znajdź wszystkie liczby czterocyfrowe podzielne przez 3 takie, że cyfrą tysięcy jest 2, a cyfrą jedności 8.

Rozwiązanie:

Liczba jest **podzielna przez 3** jeżeli suma jej cyfr tworzy liczbę **podzielną przez 3**.

Zauważamy, że liczba 2 + 8 = 10, zaś 10 : 3 = 3 reszty 1. Zatem suma cyfry setek i cyfry dziesiątek musi dawać resztę 2 z dzielenia przez 3.

Szukamy wszystkich liczb jedno- i dwucyfrowych, które dają resztę 2 z dzielenia przez 3.

2 : 3 = 0 reszty 2

5 : 3 = 1 reszty 2

8 : 3 = 2 reszty 2

11 : 3 = 3 reszty 2

14 : 3 = 4 reszty 2

17 : 3 = 5 reszty 2, można zauważyć, że szukane liczby zwiększają się o 3.

Szukane liczby to: 02, 05, 08, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 52, 56, 59,
62, 65, 68, 71, 74, 77, 80, 83, 86, 89, 92, 95, 98

Odpowiedź: Szukane liczby czterocyfrowe to:

2028,2058, 2088, 2118, 2148, 2178, 2208, 2238, 2268, 2298, 2328, 2358, 2388, 2418, 2448, 2478, 2508, 2528, 2568, 2598, 2628, 2658, 2688, 2718, 2748, 2778, 2808, 2838, 2868, 2898, 2928, 2958, 2988.

Zadanie 4.

Wykładzina dywanowa ma 2,5 m szerokości i kosztuje 19,80zł za 1 m bieżący. Ile kosztuje metr kwadratowy tej wykładziny? Ile metrów kwadratowych a ile metrów bieżących wykładziny należy kupić, aby wystarczyło jej na pokrycie całej podłogi pokoju o wymiarach 2,3m x 3,5m. Jaki będzie koszt zakupu wykładziny? Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

Obliczam pole powierzchni 1 metra bieżącego:

$$1m \cdot 2{,}5m = 2{,}5m^2$$

Oznaczmy: x- cena 1m^2 wykładziny

Wtedy mamy:

$$2{,}5\text{m}^2 \quad \text{to} \quad 19{,}80\text{zł}$$
$$1\text{m}^2 \quad \text{to} \quad x$$

$$2{,}5m^2 \cdot x = 1m^2 \cdot 19{,}80zł$$
$$x = \frac{1m^2 \cdot 19{,}80zł}{2{,}5m^2}$$
$$x = 7{,}92zł$$

Obliczam pole powierzchni pokoju: $2{,}3m \cdot 3{,}5m = 8{,}05m^2$

co odpowiada $8{,}05m^2 / 2{,}3m = 3{,}22m$ bieżącego wykładziny.

Obliczam koszt zakupu wykładziny do pokoju:

$$8{,}05 \cdot 7{,}92zł \approx 63{,}76zł$$

lub

$$3{,}5 \cdot 19{,}80zł = 69{,}30zł,$$

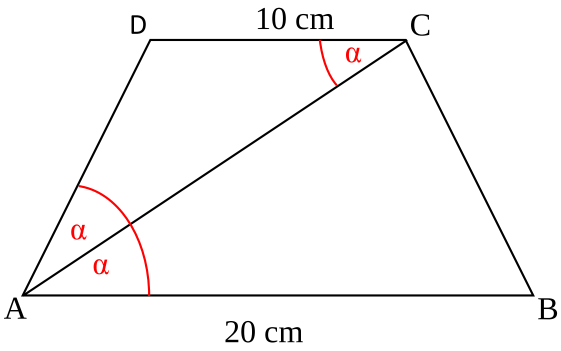
w zależności od tego, czy będziemy korzystać z odciętego kawałka czy nie, ponieważ 3,5 metra bieżącego lub 3,22 metra bieżącego wystarczy na pokrycie pokoju o wymiarach 2,3m x 3,5m.

Odpowiedź. Jeden metr kwadratowy wykładziny kosztuje 7,92zł, należy kupić 3,22 metra bieżącego wykładziny tj. 8,05m^2, za co zapłacimy około 63,76zł lub (jeśli nie chcemy podłogi z kawałków wykładziny) 3,5 metra bieżącego za co zapłacimy 69,30zł.

Zadanie 5.

W trapezie równoramiennym ABCD podstawy AB i CD mają odpowiednio długości 20 cm i 10 cm. Przekątna AC trapezu dzieli kąt przy podstawie AB na połowy. Oblicz obwód i miarę kąta ostrego trapezu ABCD. Wykonaj odpowiedni rysunek. Zapisz obliczenia.

Rozwiązanie:

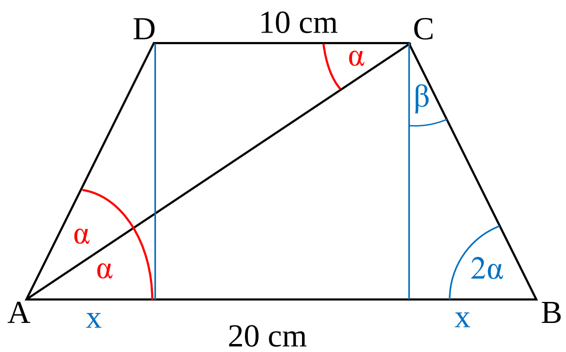


Kąty *CAB* i *DCA* to kąty naprzemianległe, czyli mają równe miary.

Trójkąt *ACD* jest równoramienny, stąd ramiona tego trapezu mają długość 10 cm.

Obwód trapezu *ABCD* jest równy 20 cm + 3 · 10cm = 50 cm.

<u>Przykładowe rozwiązanie do części drugiej</u>



Z wierzchołków *C* i *D* prowadzimy wysokości trapezu *ABCD*.

$$x = \frac{20-10}{2} = 5$$

W trójkącie prostokątnym *KBC* przyprostokątna *KB* jest dwa razy krótsza od przeciwprostokątnej *BC*, czyli , $\beta = 30^{o}$, stąd $2\alpha = 90^{o} - 30^{o} = 60^{o}$.

Odpowiedź. Kąt ostry trapezu ma miarę 60°.