

## XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

### Eliminacje – cykl styczniowy

### Poziom – szkoły podstawowe

#### Zadanie 1.

Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 10 000 i nie podzielnych przez 6, ani przez 9?

#### Rozwiązanie:

Ponieważ  $10\,000 : 6 = 1666\frac{2}{3}$ , zatem liczb naturalnych mniejszych od 10 000 i podzielnych przez 6 jest 1666.

Ponieważ  $10\,000 : 9 = 1111\frac{1}{9}$ , zatem liczb naturalnych mniejszych od 10 000 i podzielnych przez 9 jest 1111.

Ponieważ wśród nich są również liczby podzielne zarówno przez 6 jak i przez 9, zatem  $10\,000 : 18 = 555\frac{5}{9}$ , stąd jest ich 555.

Ponadto liczb podzielnych przez 6 i 9, ale nie jednocześnie będzie:

$$1666 + 1111 - 555 = 2222$$

Z powyższego wynika, że szukana ilość liczb naturalnych mniejszych od 10 000 i nie podzielnych ani przez 6, ani przez 9 będzie  $9999 - 2222 = 7777$

**Odpowiedź.** Takich liczb jest 7777.

#### Zadanie 2.

Za każdy test można otrzymać jedną z ocen: 1, 2, 3, 4, 5 albo 6. Julka napisała 4 testy i średnia z wszystkich testów wynosiła 4. Jakie oceny z testów mogła otrzymać Julka? Odpowiedź uzasadnij.

#### Rozwiązanie:

Łącznie Julka otrzymała  $4 \times 4 = 16$  punktów

I  $4+4+4+4=16$  Julka mogła otrzymać same czwórki

II Maksymalnie Julka mogła otrzymać 2 szóstki,  $2 \times 6 = 12$ ,  $16 - 12 = 4$  wówczas pozostałe oceny to: 1 lub 2

II Jeśli otrzymała 1 szóstkę, na pozostałe 3 oceny pozostało 10 punktów, czyli mogły to być: 5, 2, 3 lub 4, 4, 2 lub 4, 3, 3,

II Maksymalnie – 3 piątki, wówczas czwarta ocena to 1

III Jeśli otrzymała 2 piątki, wówczas na pozostałe oceny pozostało 6 punktów, czyli mogły to być: 2, 4 lub 3, 3

IV Jeśli otrzymała 1 piątkę, wówczas na pozostałe oceny zostało 11 punktów i mogły to być: 6,4,1 – jest wyżej lub 4,4,3 lub 2,3,6 – jest wyżej

**Odpowiedź.** Możliwe oceny to: 4,4,4,4 lub 6,5,2,3 lub 6, 5,4,1 lub 2, 2 lub 6, 6, 1, 3 lub 6, 4,4, 2 lub 6, 4,3,3 lub 5,5,2,4 lub 5,5,3,3 lub 5,5,5,1 lub 5, 4,4,3.

### Zadanie 3.

Pan Jan płaci za połączenie z Internetem 48,88zł miesięcznie. Kwota ta zawiera 22% podatku VAT. Oblicz, o ile złotych obniżyłaby się ta opłata, jeżeli opodatkowanie połączeń spadłoby do 9%.

#### Rozwiązanie:

Niech  $x$ - kwota opłaty za Internet bez podatku VAT.

$$\begin{aligned} 48,88\text{zł} &- 122\% \\ x &- 100\% \end{aligned}$$

$$x = \frac{48,88\text{zł} \cdot 100\%}{122\%}$$

$$x \approx 40,07\text{zł}$$

Niech  $y$ - kwota opłaty za Internet zawierająca 9% podatku VAT

$$\begin{aligned} 40,07\text{zł} &- 100\% \\ y &- 109\% \end{aligned}$$

$$y = \frac{40,07\text{zł} \cdot 109\%}{100\%}$$

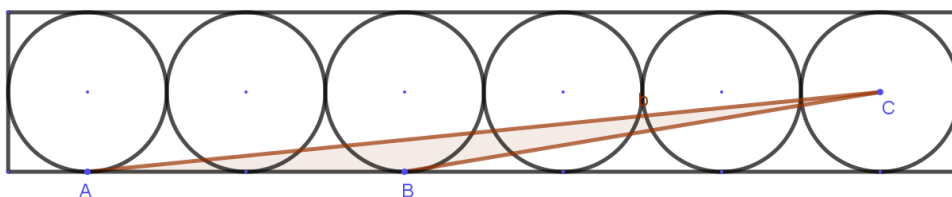
$$y \approx 43,68\text{zł}$$

$$48,88\text{zł} - 43,68\text{zł} = 5,20\text{zł}$$

**Odpowiedź.** Opłata za połączenia z Internetem obniżyła by się o około 5złoty i 20 groszy.

### Zadanie 4.

Sześć stycznych okręgów o promieniu 4 cm zostało umieszczonych w prostokącie jak na rysunku obok. Ile jest równe pole figury po wycięciu z prostokąta trójkąta ABC, jeśli C jest środkiem okręgu, a B i C punktami styczności?



**Rozwiązanie:**

$$a = 4 \cdot 12 = 48 \text{ cm}$$

$$b = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}$$

$$P_{\text{prostokąta}} = 4 \cdot 48 = 384 \text{ cm}^2$$

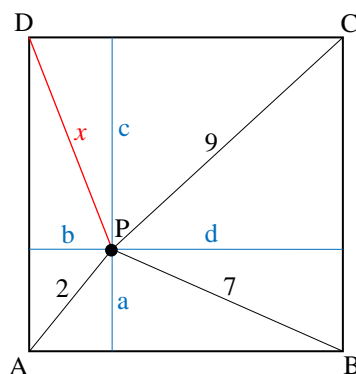
$$P_{\text{trójkąta}} = 16 \cdot 4 : 2 = 32 \text{ cm}^2$$

$$P_{\text{figury}} = 384 \text{ cm}^2 - 32 \text{ cm}^2 = 352 \text{ cm}^2$$

**Odpowiedź.** Pole figury jest równe  $352 \text{ cm}^2$ .

**Zadanie 5.**

Punkt P leży wewnątrz kwadratu ABCD. Odległości tego punktu od wierzchołków A, B i C, wynoszą odpowiednio: 2, 7 i 9. Ile wynosi odległość punktu P od wierzchołka D?

**Rozwiązanie:**

Oznaczmy odcinki odcięte przez proste prostopadłe (przechodzące przez punkt P) przez a, b, c i d, tak jak na rysunku.

Wtedy mamy związki

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 2^2, & \text{oraz} & & c^2 + d^2 &= 9^2, \\ b^2 + c^2 &= x^2, & & & a^2 + d^2 &= 7^2. \end{aligned}$$

Stąd:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= x^2 + 7^2 \\ 4 + 81 &= x^2 + 49 \\ x^2 &= 36 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

**Odpowiedź.** Odległość punktu P od wierzchołka D jest równa 6.