XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl marcowy
Poziom: szkoły podstawowe klasy 1-7

Zadanie 1.

Ile liczb pierwszych między 10 a 99 pozostaje liczbami pierwszymi, gdy odwróci się kolejność ich cyfr?

Rozwiązanie:

Liczba pierwsza, która jest większa od 10, musi kończyć się cyfrą 1, 3, 7 lub 9, więc wypiszmy liczby pierwsze zapisywane tylko przy użyciu tych cyfr:

$$11,13,17,19,31,37,71,73,79,97.$$

Jak widać musimy z nich odrzucić tylko 19, bo 91 jest liczbą złożoną.

Odpowiedź. Jest 9 takich cyfr.

Zadanie 2.

Liczba $3^{32}-1$ ma dokładnie dwa dzielniki zawarte między 75 i 84. Ile jest równy iloczyn tych dwóch dzielników?

Rozwiązanie:

$$3^{32}-1=(3^{16}-1)(3^{16}+1)=(3^{8}-1)(3^{8}+1)(3^{16}+1)=(3^{4}-1)(3^{4}+1)(3^{8}+1)(3^{16}+1)=$$
$$=80\cdot 82\cdot(3^{8}+1)(3^{16}+1)$$

Odpowiedź: Z warunków zadania wynika, że iloczyn jest równy $80\cdot 82=6560.$

Zadanie 3.

Zespół składający się z 28 robotników miał wykonać pewną pracę w ciągu 26 dni. Po 6 dniach od rozpoczęcia pracy liczbę robotników zwiększono i pracę tę wykonano 4 dni przed terminem. Ilu robotników zatrudniono dodatkowo do wykonania tej pracy, jeżeli wszyscy robotnicy pracowali z tą samą wydajnością? Zapisz obliczenia i pełną odpowiedź.

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

n – liczba pracowników dodatkowo zatrudnionych

liczba planowanych dni - 26

wykonano - 4 dni przed terminem.

Stąd $26 - 4 = 22$ dni.

Pracownicy zatrudnieni dodatkowo pracowali o 6 dni krócej niż zatrudnieni od początku.

Ich czas pracy wynosi $22 - 6 = 16$ dni

Ponieważ 28 pracowników wykonałoby pracę w ciągu 26 dni, to jeden pracownik musiałby pracować $26 \cdot 28 = 728$ dni.

Wobec tego, jeden pracownik w ciągu jednego dnia - $\frac{1}{728}$ tej pracy.

Stąd w ciągu 22 dni 28 pracowników wykonałoby - $22 \cdot 28 \cdot \frac{1}{728} = \frac{11}{13}$,

a w ciągu 16 dni *n* pracowników - $16 \cdot n \cdot \frac{1}{728} = \frac{2n}{91}$.

Pracownicy zatrudnieni od początku i zatrudnieni dodatkowo wykonali całą pracę –

$$\frac{11}{13} + \frac{2n}{91} = 1$$

$$\frac{2n}{91} = 1 - \frac{11}{13}.$$

$$n = 7.$$

Odpowiedź. Do pracy zatrudniono dodatkowo 7 robotników.

Zadanie 4.

Dwa trójkąty równoboczne mają wspólny środek i boki równoległe. Pole jednego jest dwa razy większe od pola drugiego, a bok mniejszego ma długość 1. Oblicz długość boku drugiego trójkąta.

Rozwiązanie:
Korzystamy ze wzoru na pole trójkąta równobocznego:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

gdzie *a*- długość boku trójkąta równobocznego.

Niech S_1 – oznacza pole trójkąta mniejszego, a S_2- pole trójkąta większego oraz *a*- długość boku większego trójkąta

Z warunków zadania mamy, że $S_2 = 2S_1$ oraz

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{oraz} \quad S_2 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a^2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}.$$

Odpowiedź. Bok większego trójkąta ma długość $\sqrt{2}$.

Zadanie 5.

Podstawą pewnego graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnej długości 3 cm i przeciwprostokątnej długości 5 cm. Z dwóch takich graniastosłupów o wysokości 1 dm każdy zbudowano graniastosłup czworokątny, sklejając je ścianami bocznymi. Jakie najmniejsze, a jakie największe pole powierzchni bocznej może mieć tak zbudowany graniastosłup? Ile wynosi objętość tego graniastosłupa? Zapisz obliczenia i pełną odpowiedź.

Rozwiązanie:

Oznaczmy: x – długość drugiej przyprostokątnej trójkąta prostokątnego

Z twierdzenia Pitagorasa mamy wtedy

$$x^2 + 3^2 = 5^2$$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$x^2 = 16.$$

$$x = 4$$

H - 10 cm

Najmniejsze pole powierzchni bocznej będzie miał graniastosłup, którego podstawa jest figurą o obwodzie 14 cm (graniastosłupy sklejone krawędziami długości 5 cm).

$$P_{najm} = 14 \cdot 10 = 140.$$

Największe pole powierzchni bocznej będzie miał graniastosłup, którego podstawa jest figurą o obwodzie 18 cm (graniastosłupy sklejone krawędziami długości 3cm).

$$P_{najw} = 18 \cdot 10 = 180.$$

Objętość tego graniastosłupa w obu przypadkach jest równa

$$V = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\right) \cdot 10 = 120.$$

Odpowiedź. Najmniejsze pole powierzchni bocznej jest równe 140 cm^2, największe 180 cm^2. Objętość tego graniastosłupa w obu przypadkach jest równa 120 cm^3.