

XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl marcowy

Poziom: szkoła podstawowa

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.

Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 9 i żeby po przestawieniu jej cyfr otrzymać liczbę mniejszą od połowy szukanej liczby. Podaj wszystkie rozwiązania.

Rozwiązanie:

Niech x oznacza cyfrę jedności szukanej liczby ($x = 1, 2, \dots, 8$), wówczas cyfra dziesiątek jest równa $9 - x$, a liczbę można zapisać:

$$x + 10(9 - x) = 90 - 9x$$

Po przestawieniu cyfr liczba ma postać:

$$9 - x + 10x = 9 + 9x.$$

Otrzymujemy nierówność

$$9 + 9x < 0,5(90 - 9x),$$

której rozwiązaniem jest $x < 2\frac{2}{3}$, czyli $x = 1$ lub $x = 2$.

Wobec tego szukane liczby to 90, 81 i 72.

Odpowiedź. Szukane liczby to 90, 81 i 72.

Zadanie 2.

Znajdź resztę z dzielenia liczby 2^{99} przez 3.

Rozwiązanie:

$$2^{99} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{99}$$

Rozpatrzmy kolejne potęgi liczby 2.

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4 = 3 + 1$$

$$2^3 = 8 = 2 \cdot 3 + 2,$$

$$2^4 = 16 = 5 \cdot 3 + 1,$$

$$2^5 = 32 = 10 \cdot 3 + 2,$$

$$2^6 = 64 = 21 \cdot 3 + 1,$$

$$2^7 = 128 = 42 \cdot 3 + 2, \text{ itd.}$$

Można zauważyć, że jeżeli wykładnik potęgi jest nieparzysty, to reszta z dzielenia danej liczby przez trzy wynosi 2, natomiast jeżeli wykładnik jest parzysty, to reszta z dzielenia jest równa 1. Ponieważ liczba 2^{99} ma wykładnik nieparzysty, zatem szukana reszta wynosi 2.

Odpowiedź. Reszta z dzielenia jest równa 2.

Zadanie 3.

Dawid wyjechał z domu w kierunku lotniska. Przez pierwszą godzinę jechał z prędkością 70 km/h na godzinę, ale stwierdził, że jadąc nadal z tą prędkością spóźni się na samolot o równą godzinę. Zwiększył prędkość jazdy o 30 km/h i dojechał na lotnisko pół godziny przed czasem. Ile kilometrów jest od domu Dawida do lotniska?

Rozwiązanie:

s - odległość od domu Dawida do lotniska
 t - czas potrzebny do przejazdu reszty drogi

$$\begin{aligned}s &= 70 \text{ km} + 70 \text{ km/h} \cdot (t + 1) \\ s &= 70 \text{ km} + 100 \text{ km/h} \cdot (t - \frac{1}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}70 \text{ km} + 70 \text{ km/h} \cdot (t + 1) &= 70 \text{ km} + 100 \text{ km/h} \cdot (t - \frac{1}{2}) \\ 70 \cdot t + 70 &= 100 \cdot t - 50 \\ 30 \cdot t &= 120 \\ t &= 4 \text{ h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s &= 70 \text{ km} + 70 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ h} \\ s &= 420 \text{ km}\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}s &= 70 \text{ km} + 100 \text{ km/h} \cdot 3,5 \text{ h} \\ s &= 420 \text{ km}\end{aligned}$$

Odpowiedź. Od domu Dawida do lotniska jest 420 km.

Zadanie 4.

Po obniżce o 25% płaszcz kosztuje 300zł.

- Oblicz, ile kosztował ten płaszcz przed obniżką.
- Oblicz jaką kwotę podatku należy odprowadzić po sprzedaży tego płaszcza, jeżeli jest on obciążony 23% VAT- em. Wynik zaokrąglij do 0,01 zł.

Rozwiązanie:

a) Niech x oznacza cenę płaszcza przed obniżką.

Wtedy cena płaszcza po obniżce, to 75% kwoty x

Otrzymujemy równanie:

$$75\% \text{ kwoty } x = 300\text{zł}$$

$$\frac{75}{100} \cdot x = 300\text{zł}$$

$$x = 300\text{zł} \div \frac{75}{100}$$

$$x = \frac{300\text{zł} \cdot 100}{75}$$

$$x = 400\text{zł}.$$

b) Niech y oznacza cenę płaszcza bez podatku VAT.
Wtedy cena płaszcza wraz z 23% podatkiem VAT jest równa 300zł.

Możemy ułożyć proporcję:

$$\begin{array}{l} 300\text{zł} - 123\% \\ y - 100\% \end{array}$$

Stąd

$$123\% y = 300\text{zł} \cdot 100\%$$

$$y = \frac{300\text{zł} \cdot 100\%}{123\%}$$

$$y \approx 243,90\text{zł}.$$

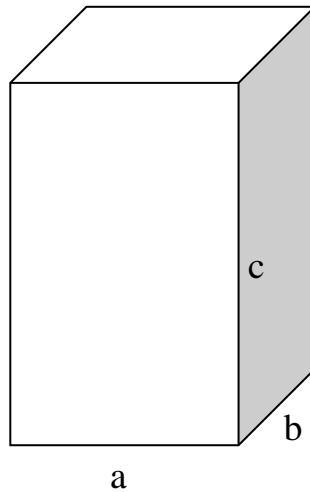
$$300\text{zł} - 243,90 = 56,10\text{zł}$$

Odpowiedź. Płaszcz przed obniżką kosztował 400zł, po sprzedaży tego płaszcza należy odprowadzić 56,10zł podatku VAT.

Zadanie 5.

W pewnym prostopadłościanie iloczyn pól trzech ścian o wspólnym wierzchołku jest równy 576. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Rozwiązanie:



a, b, c – długości krawędzi prostopadłościanu,
 P_1, P_2, P_3 – pola powierzchni ścian o wspólnym wierzchołku,

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = 576.$$

$$P_1 = ab, P_2 = bc, P_3 = ac$$

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 = ab \cdot bc \cdot ac = 576$$

$$ab \cdot bc \cdot ac = (abc)^2 = 576$$

$$abc = 24.$$

Iloczyn abc jest równy objętości prostopadłościanu o krawędziach a, b, c zatem

$$V = abc = 24.$$

Odpowiedź. Objętość tego prostopadłościanu jest równa 24.