XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Kategoria: Szkoły podstawowe do klasy 7

Olsztyn, 16 maja 2019

Zadanie 1.

Znaleźć sumę cyfr liczby $100^{49} - 2019$.

Rozwiązanie:

$$100^{49} - 2019 = (10^2)^{49} - 2019 = 10^{98} - 2019 = 1\underbrace{000...0}_{94}0000 - 2019 = \underbrace{99...9}_{94}7981$$

Wynika z tego, że suma cyfr liczby $100^{49} - 2019$ jest równa

$$94 \cdot 9 + 7 + 9 + 8 + 1 = 871.$$

Odpowiedź. Suma cyfr liczby $100^{49} - 2019$ jest równa 871.

Zadanie 2.

Liczby naturalne większe od 0 i mniejsze od 18 ustawiono w skończony ciąg w takiej kolejności, że suma dwóch kolejnych liczb jest kwadratem liczby naturalnej.
Oblicz sumę pierwszej i ostatniej liczby w tym ciągu.

Rozwiązanie: Suma dwóch liczb naturalnych z naszego zbioru

$$Z = \{1,2,...,17\}$$

jest liczbą naturalną nie mniejszą niż 2 i nie większą niż 34. Wśród takich liczb kwadratami liczb naturalnych są liczby ze zbioru

$$K = \{4,9,16,25\}$$

Jeżeli liczba a znajdowałaby się wewnątrz naszego ciągu, to w zbiorze K istniałyby dwie różne liczby od niej większe, mianowicie $a+b$ i $a+c$, gdzie b i c są sąsiadami a.

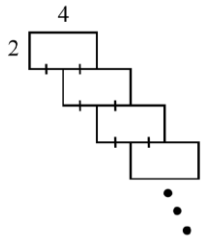
Jest to niemożliwe dla dokładnie dwóch liczb ze zbioru Z, mianowicie dla liczb 16 i 17.
W takim razie żadna z nich nie może znajdować się wewnątrz naszego ciągu. Jedna jest zatem pierwsza, a druga ostatnia, z czego wynika, że suma pierwszej i ostatniej liczby wynosi

$$16 + 17 = 33.$$

Odpowiedź. Suma pierwszej i ostatniej liczby w tym ciągu jest równa 33.

Zadanie 3.

Prostokąty o bokach długości 4 oraz 2 ułożono zgodnie z następującą zasadą, zilustrowaną poniżej: lewy, górny wierzchołek każdego prostokąta (z wyjątkiem pierwszego) pokrywa się ze środkiem dolnego, dłuższego boku prostokąta znajdującego się powyżej. Jaki jest obwód figury, uzyskanej w wyniku zestawienia dziesięciu prostokątów, zgodnie z powyższą zasadą?



Rozwiązanie:
Obwód każdego prostokąta jest równy

$$o = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 12.$$

Długość części wspólnych (pokrywających się) wynosi

$$p = 9 \cdot (2 + 2) = 36.$$

Wynika z tego, że obwód figury jest równy

$$O = 10 \cdot o - p = 120 - 36 = 84.$$

Odpowiedź. Obwód figury jest równy 84.

Zadanie 4.
Kasia narysowała sześcian. Następnie obok niego narysowała kolejne sześciany, takie, że każdy kolejny sześcian miał krawędź o połowę mniejszą lub o połowę większą (naprzemiennie) od krawędzi poprzedniego sześcianu. Jaką długość miała krawędź sześcianu narysowanego na początku przez Kasię, jeśli objętość sześcianu narysowanego w piątym kroku wynosiła 729 ?

Rozwiązanie: Kasia naprzemiennie mnoży długość krawędzi poprzedniego sześcianu albo przez 1/2 albo przez 3/2. Ponieważ mnożenie wykonuje 4 razy, długość krawędzi piątego sześcianu wynosi

$$a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = a \cdot \frac{9}{16}$$

Objętość ostatniego sześcianu jest równa

$$\left(a \cdot \frac{9}{16} \right)^3 = a^3 \cdot \frac{9^3}{16^3} = 729 = 9^3$$

Zatem otrzymujemy

$$a^3 \cdot \frac{9^3}{16^3} = 9^3 \text{ , a stąd } \; a^3 = 16^3$$

z czego wynika, że $a = 16$.

Odpowiedź. Długość krawędzi sześcianu narysowanego na początku była równa 16.