XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Kategoria: Szkoły podstawowe

Olsztyn, 17 maja 2018

Zadanie 1.
Znajdź najmniejszą liczbę naturalną większą od 2, która przy dzieleniu przez każdą z liczb $10, 12,\ 21$ daje resztę 2.

Rozwiązanie:

Niech a oznacza taką liczbę. Wtedy $a - 2$ dzieli się przez każdą z liczb 10, 12, 21. Zatem najmniejsza taką liczbą jest NWW(10,12,21) = 420. Stąd $a = 422$.

Odpowiedź. $a = 422$

Zadanie 2.
Z jednego kilograma świeżych pomidorów dostajemy 80 gramów pomidorów suszonych. Jaka jest zawartość wody w pomidorach suszonych, jeżeli świeże pomidory zawierają 93% wody?

Rozwiązanie:

Masa świeżych pomidorów: $1kg = 1000g$

Ilość wody w świeżych pomidorach: $93\% \cdot 1000 = 930g$

Masa suszonych pomidorów: $80g$

Ubytek wody: $1000 - 80 = 920g$

Zatem w pomidorach suszonych jest $930 - 920 = 10g$ wody

Stąd zawartość wody w suszonych pomidorach: $\frac{10}{80} = 12{,}5\%$

Odpowiedź.

Zadanie 3.
Janek otrzymał następujące oceny śródroczne z przedmiotów szkolnych:

4 3 4 2 4 4 3 6 4

Z ilu co najmniej przedmiotów powinien poprawić ocenę o jeden, aby mieć średnią powyżej 4 na koniec roku? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Średnia ocen Janka to $\frac{34}{9} = 3,(7)$. Szukamy x takiego, że $\frac{34+x}{9} > 4,\quad 34 + x > 36,\ x > 2$. Zatem Janek musi poprawić co najmniej 3 oceny.

Odpowiedź. Janek musi poprawić co najmniej 3 oceny.

Zadanie 4.
Ania, Kasia, Ola i Ewa mieszkają przy ulicy Słonecznej na osiedlu, na którym wszystkie ulice są proste i przecinają się pod kątem prostym. Odległość domu Kasi od domu Ani jest równa $110m$, a od domu Oli $130m$. Odległość domu Ewy od domu Ani jest równa $140m$, a od domu Oli $120m$. Szkoła położona jest przy ulicy Szkolnej. Ania mieszka przy skrzyżowaniu ulic Słonecznej i Szkolnej i ma tylko $300m$ do szkoły idąc wzdłuż ulicy Szkolnej. Zakładając, że dziewczynki chodzą do szkoły tylko wzdłuż ulic (nie ma drogi na skróty) wyznacz długość najkrótszej drogi do szkoły każdej z pozostałych dziewczynek. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

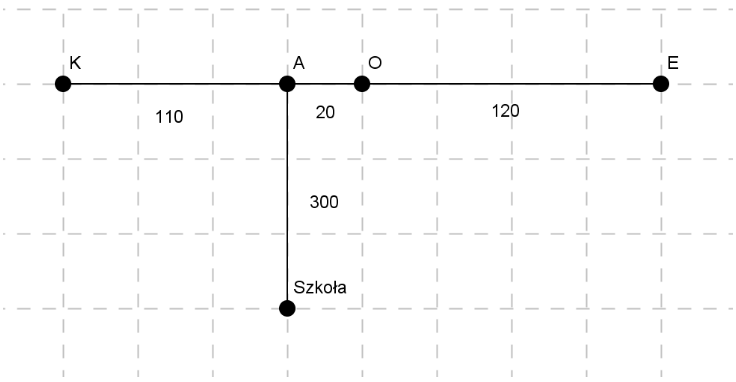
Oznaczmy domy dziewczynek jako punkty A,E,K,O na prostej. Napis np. AE oznacza długość odcinka AE na tej prostej. Rozważamy możliwe rozmieszczenia domów dziewczynek.

Gdyby było:

1. AKO lub OKA, to AO=AK + KO = 240. Wtedy może być

   A. EOA lub AOE i w tych obu przypadkach mamy AO = 20 co jest różne od 240
   B. AEO lub OEA i w tych obu przypadkach dostajemy AO = AE + EA = 260 co jest różne od 240.

2. KAO lub OAK, to AO = 20. Wtedy musi być EOA lub AOE.
Zatem jedyny możliwy układ domów dziewczynek to Kasia, Ania, Ola, Ewa (lub równoważny: Ewa, Ola, Ania, Kasia).



Bez różnicy jakimi ulicami będą dziewczynki szły do szkoły, to droga każdej z nich wyniesie co najmniej:

odległość od domu Ani (w poziomie) + 300m w pionie (wykorzystujemy informacje, że wszystkie ulice są proste i przecinają się pod kątem prostym).

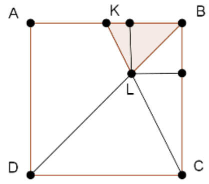
Czyli Kasia ma 410m, Ola 320m, Ewa 440m.

Uwaga: nie można postawić maksymalnej liczby punktów, jeżeli uczeń nie zauważy, że mogą być inne drogi do szkoły niż tylko do Ani a potem od Ani do szkoły)

Zadanie 5.
Mamy dany kwadrat $ABCD$ o boku długości 8. Niech K oznacza środek boku AB oraz niech L będzie punktem przecięcia przekątnej kwadratu BD z odcinkiem KC. Oblicz pole trójkąta BKL.

Rozwiązanie:

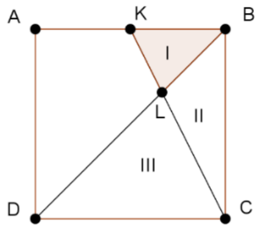
Sposób I



Ponieważ L leży na przekątnej, więc trójkąty KBL i BCL mają tę samą długość wysokości opuszczonej z L. BCL ma dwa razy większą podstawę, więc i pole ma dwa razy większe. Zatem KBL ma pole równe jednej trzeciej pola trójkąta KBC (który jest sumą pól trójkątów KBL i BCL).

Pole trójkąta KBC jest równe $\frac{8\cdot 4}{2} = 16$. Stąd KBL ma pole równe $\frac{16}{3}$.

Sposób II



Oznaczmy pola trójkątów jak na rysunku.

Zauważamy, że trójkąty KLB i CLD są podobne (odpowiednie kąty równe, bo KB||DC). Skala podobieństwa to $\frac{KB}{DC} = \frac{1}{2}$, więc $III \ = \ 4\,I$

Pole trójkąta BCD jest równe $II + III = \frac{8\cdot 8}{2} = 32$

Pole trójkąta KBC jest równe $I + II = \frac{4\cdot 8}{2} = 16$

$$III - I = 16$$

$$4I - I = 16$$

$$I = \frac{16}{3}$$

Odpowiedź. Pole trójkąta KLB jest równe $\frac{16}{3}$.