XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl lutowy

Poziom: szkoły podstawowe

Zadanie 1. Oblicz wartość wyrażenia

$$\frac{10^{2018}+10^{2020}}{10^{2019}+10^{2019}}.$$

Rozwiązanie.

$$\frac{10^{2018}+10^{2020}}{10^{2019}+10^{2019}}=\frac{10^{2018}+10^{2018+2}}{2\cdot 10^{2019}}=\frac{10^{2018}+100\cdot 10^{2018}}{2\cdot 10^{2018+1}}=$$

$$=\frac{101\cdot 10^{2018}}{20\cdot 10^{2018}}=\frac{101}{20}=5{,}05.$$

Odpowiedź. Wartość wyrażenia równa jest 5,05.

Zadanie 2. Spośród pięciu liczb pierwszych, leżących pomiędzy liczbami 4 i 18, wybrano dwie liczby. Po odjęciu ich sumy od iloczynu otrzymano liczbę, która jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb 7 i 17. Jakie to są liczby?

Rozwiązanie.

Liczbami pierwszymi, które leżą pomiędzy czwórką i osiemnastką, są następujące liczby: 5, 7, 11, 13 i 17.

Ponieważ NWW(7, 17) = 119, to warunek z zadania możemy zapisać $p\cdot q-(p+q)=119$.

Skoro od iloczynu odejmujemy sumę, więc iloczyn musi być większy od 119. Łatwo sprawdzić, że nie pasują liczby 5 i 7, bo iloczyn będzie za mały. Pozostają tylko pozostałe liczby:

$$11\cdot 17-(11+17)=187-28=159-\text{ nie,}$$

$$13\cdot 17-(13+17)=221-30=191-\text{ nie,}$$

$$11\cdot 13-(11+13)=143-24=119-\text{ tak.}$$

Odpowiedź. Szukanymi liczbami są 11 i 13.

Zadanie 3. Pociąg mija obserwatora w czasie 8 sekund. Ten sam pociąg, jadąc z taką samą prędkością, mija peron o długości 400 m w czasie 48 sekund. Oblicz długość pociągu i prędkość, z jaką mijał stację. Prędkość wyraź w km/h.

Rozwiązanie.

d – długość pociągu

v - prędkość

Możemy przyjąć, że obserwator jest punktem, wówczas żeby go minąć pociąg musi przejechać trasę równą swojej długości. Zatem otrzymujemy równanie:

$$d = vt = 8v$$

Natomiast, żeby przejechać obok peronu, pociąg musi przejechać trasę równą długości pociągu i peronu. Otrzymujemy równanie:

$$400 + d = 48v$$

$$400 + 8v = 48v$$

$$40v = 400$$

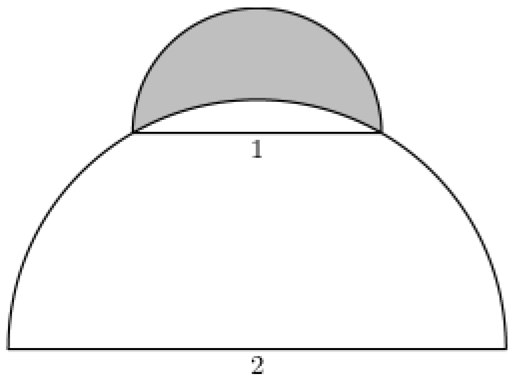
$$v = 10 \text{ m/s}$$

$$v = 36 \text{ km/h}$$

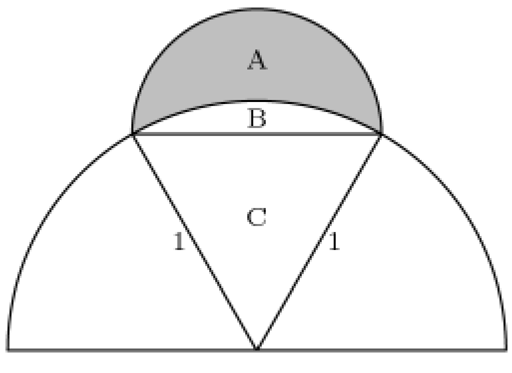
$$d = 8 \cdot 10 = 80 \text{ m}$$

Odpowiedź. Długość pociągu wynosi 80 m, prędkość – 36 km/h.

Zadanie 4. Półkole o średnicy 1 znajduje się na górze półkola o średnicy 2, jak na rysunku. Oblicz pole zacieniowanego obszaru.



Rozwiązanie.



Pole obszaru $A + B$:

$$[A+B]=\frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}\pi.$$

Pole obszaru $B + C$:

$$[B+C]=\frac{60}{360}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{1}{6}\pi.$$

Pole C trójkąta:

$$[C]=\frac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Pole A obszaru zacieniowanego:

$$[A]=[A+B]-[B+C]+[C]=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{24}\pi.$$

Odpowiedź. Pole obszaru zacieniowanego wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{24}\pi$.

Zadanie 5. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe polu powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości 5 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie.

a – długość krawędzi podstawy graniastosłupa

$2a$ – wysokość graniastosłupa

Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości 5 cm

$$5\cdot 5\cdot 6 = 150\ \text{cm}^3$$

Pole powierzchni całkowitej Pc graniastosłupa :

$$Pc = 2a^2 + 4\cdot a\cdot 2a$$

$$Pc = 10a^2$$

Obliczenie długości krawędzi a :

$$10a^2 = 150$$

$$a^2 = 15$$

$$a = \sqrt{15}$$

Wysokość graniastosłupa:

$$H = 2a = 2\sqrt{15}$$

Objętość graniastosłupa:

$$V = P_p\cdot H$$

$$V = 15 \cdot 2\sqrt{15}$$

$$V = 30\sqrt{15}$$

Odpowiedź. Objętość tego graniastosłupa jest równa $30\sqrt{15}$ cm^3.