XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl lutowy
Poziom: szkoły podstawowe klasy 1-7
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.
Znajdź sumę liczb:

$$1000 - 999 + 998 - 997 + 996 - ... + 4 - 3 + 2 - 1.$$

Rozwiązanie:

$$1000 - 999 + 998 - 997 + 996 - ... + 4 - 3 + 2 - 1 =$$
$$= (1000 - 999) + (998 - 997) + (996 - 995) + ... + (4 - 3) + (2 - 1) =$$
$$= \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{500 \text{ razy}} = 500$$

Każdy nawias zaczyna się kolejną liczbą parzystą. Od 1000 do 2 jest razem 500 liczb parzystych.

Odpowiedź. Suma podanych liczb równa jest 500.

Zadanie 2.
Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (a, b) spełniających równanie
$$ab - a + b = 25$$
i uzasadnij, że nie ma ich więcej.

Rozwiązanie:
$ab - a + b = 25$
$b(a + 1) = 25 + a$

$$b = \frac{25+a}{a+1}; \ a \neq -1 \quad b = \frac{24+1+a}{a+1}; \ b = \frac{1+a}{a+1} + \frac{24}{a+1}; \ b = 1 + \frac{24}{a+1}$$

Liczba *b* będzie liczbą naturalną jeśli a + 1 będzie dzielnikiem liczby 24.

Dzielnik liczby 24	1	2	3	4	6	8	12	24
a	0	1	2	3	5	7	11	23
b	25	13	9	7	5	4	3	2
Czy a i b są liczbami pierwszymi	nie	nie	nie	tak	tak	nie	tak	tak

Odpowiedź. Pary spełniające podane warunki to: (3,7), (5,5), (11,3), (23,2).

Zadanie 3.
Złotnik miał dwa stopy złota ze srebrem. W pierwszym stopie stosunek masy złota do masy srebra wynosi 2:3, a w drugim 3:7. Ile musi on wziąć każdego ze stopów, aby otrzymać 8 kg nowego stopu, w którym stosunek masy złota do srebra wynosiłby 5:11?

Rozwiązanie:
Niech x oznacza masę pierwszego stopu, a $8 - x$ – masę drugiego stopu.
Stąd otrzymujemy, że pierwszy stop zawiera $\frac{2}{5}x$ złota, a drugi $\frac{3}{10}(8-x)$ złota.
Z warunków zadania otrzymamy równanie

2/5x + 3/10(8 – x) = 5/16 • 8 , Stąd **x = 1** $\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{16}\cdot 8$

$$\frac{4}{10}x+\frac{3}{10}(8-x)=\frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{10}x-\frac{3}{10}x+\frac{24}{10}=\frac{25}{10}$$

$$\frac{1}{10}x=\frac{25}{10}-\frac{24}{10}=\frac{1}{10}$$

$$x=1$$

Odpowiedź. Złotnik musi stopić 1 kg pierwszego stopu i 7 kg drugiego stopu.

Zadanie 4.

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym AC = BC. Na boku AB tego trójkąta istnieje punkt D taki, że AD = AC oraz DB = DC. Wykonaj odpowiedni rysunek i oblicz miarę kąta ACB.

Rozwiązanie:

Niech miara kąta CAB wynosi α, wtedy miara kąta ABC też wynosi α, ponieważ trójkąt ABC jest równoramienny oraz miara kąta BCD również wynosi α, gdyż trójkąt DCB jest równoramienny.

Zatem miara kąta CDB wynosi $180^o - 2\alpha$, zaś miary kątów ADC oraz ACD mają równe miary, bo trójkąt CDA jest równoramienny i wynoszą $\frac{180^o-\alpha}{2}=90^o-\frac{\alpha}{2}$

Z tego, że kąty ADC oraz BDC są przyległe otrzymujemy:

$$90^o-\frac{\alpha}{2}+180^o-2\alpha=180^o$$

$$90^o-\frac{\alpha}{2}-2\alpha=0$$

$$180^o-\alpha-4\alpha=0$$

$$-5\alpha=-180^o$$

$$\alpha=36^o$$

Zatem miara kąta ACB wynosi $90^o - \frac{\alpha}{2} + \alpha = 90^o - 18^o + 36^0 = 108^o$

Odpowiedź. Miara kąta ACB jest równa 108^o .

Zadanie 5.

W prostopadłościanie *F* stosunek długości trzech krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka był równy 10:5:4. Najpierw dwie dłuższe krawędzie tego prostopadłościanu zmniejszono o 40%, otrzymując prostopadłościan F_1. Następnie najkrótszą z krawędzi prostopadłościanu F_1 zmniejszono o 60%, otrzymując prostopadłościan F_2.

a) Oblicz, o ile procent mniejsza jest objętość prostopadłościanu F_2 od objętości prostopadłościanu F_1.

b) Oblicz, o ile procent większa jest objętość prostopadłościanu F_1 od objętości prostopadłościanu F_2.

Rozwiązanie:

10x, 5x, 4x - długości krawędzi prostopadłościanu F

$V = 200x^3$ - objętość prostopadłościanu F

6x,3x, 4x - długości krawędzi prostopadłościanu F_1

$V_1 = 72x^3$ - objętość prostopadłościanu F_1

6x; 1,2x; 4x - długości krawędzi prostopadłościanu F_2

$V_2 = 28{,}8x^3$ - objętość prostopadłościanu F_2

a) $\frac{200-28{,}8}{200} \cdot 100\% = \frac{171{,}2}{200} \cdot 100\% = 85{,}6\%$

b) $\frac{72-28{,}8}{28{,}8} \cdot 100\% = \frac{43{,}2}{28{,}8} \cdot 100\% = 150\%$

Odpowiedź. Objętość prostopadłościanu F_2 jest mniejsza o 85,6% od objętości prostopadłościanu F_1. Objętość prostopadłościanu F_1 jest większa o 150% od objętości prostopadłościanu F_2.