XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl listopadowy – rozwiązania

Poziom: szkoły podstawowe

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1. Zegar ścienny nakręcono i nastawiono na godzinę drugą. Zegar chodził bez przerwy 185 godzin i zatrzymał się. Na której godzinie zatrzymały się wskazówki zegara?

Rozwiązanie.

185 godzin to 7 dni i 17 godzin,

$$2 + 17 = 19$$

Odpowiedź. Wskazówki zegara zatrzymały się na godzinie 19.

Zadanie 2. Klasa licząca 25 uczniów zakupiła 25 biletów do kina w II rzędzie z numerami od 1 do 25. Uczniowie losowali między sobą bilety, następnie każdy z nich obliczył sumę liczby określającej miejsce w kinie i liczby, pod którą jest zapisany w dzienniku. Wykaż, że co najmniej jeden uczeń otrzymał liczbę parzystą jako wynik tej sumy.

Rozwiązanie.

Zastanówmy się, czy jest możliwe, żeby każdy uczeń otrzymał w wyniku liczbę nieparzystą.

Aby tak się stało musiałby dodać liczbę parzystą do nieparzystej.

Zauważmy, że wśród liczb od 1 do 25 występuje 13 liczb nieparzystych i 12 parzystych, czyli mamy 12 parzystych numerów uczniów w dzienniku i 12 parzystych numerów miejsc w rzędzie. Razem mamy do dyspozycji tylko 24 możliwe liczby parzyste, a uczniów mamy 25.

To oznacza, że przynajmniej dla jednego uczenia zabrakło liczby parzystej do dodania, więc musiał dodawać dwie liczby nieparzyste.

Tym samym otrzymał w wyniku liczbę parzystą.

Odpowiedź. Co najmniej jeden uczeń otrzymał liczbę parzystą jako wynik tej sumy.

Zadanie 3. Dodając kolejne liczby naturalne (1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, …), otrzymujemy liczby, zwane liczbami trójkątnymi: 1, 3, 6, 10, 15, … .

Jaką liczbą jest pięćdziesiąta liczba trójkątna?

Rozwiązanie.

Pięćdziesiąta liczba trójkątna jest sumą $1 + 2 + 3 + \ldots + 50$. W celu policzenia tej sumy ustawmy kolejne składniki na dwa sposoby i zsumujmy w kolumnach:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 49 & 50 \\ 50 & 49 & 48 & \cdots & 2 & 1 \\ \hline 51 & 51 & 51 & \cdots & 51 & 51 \end{array}$$

Dodając, otrzymaliśmy podwojoną sumę $2(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$, która ma 50 składników, z których każdy jest równy 51.

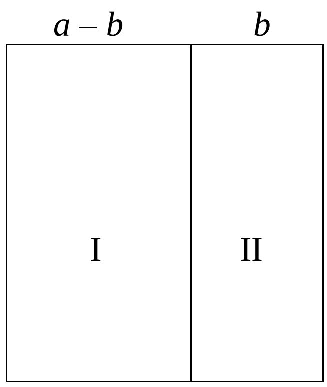
Zatem pięćdziesiątą liczbą trójkątną jest

$$\frac{50 \cdot 51}{2} = 1275.$$

Odpowiedź. Pięćdziesiąta liczba trójkątna jest równa 1275.

Zadanie 4. Kwadrat podzielono na dwa prostokąty tak, że stosunek ich obwodów jest równy 7:5. Oblicz stosunek pola większego prostokąta do pola mniejszego prostokąta.

Rozwiązanie.



$$\text{Obw}_1 = 2\,(a - b) + 2a$$

$$\text{Obw}_2 = 2a + 2b$$

$$\frac{\text{Obw1}}{\text{Obw2}} = \frac{2a - 2b + 2a}{2a + 2b} = \frac{2(a - b + a)}{2(a + b)} = \frac{2\text{a} - \text{b}}{\text{a} + \text{b}}$$

Wiemy, że

$$\frac{\text{Obw1}}{\text{Obw2}} = \frac{7}{5}$$

a stąd

$$7a + 7b = 10a - 5b$$

$$12b = 3a$$

$$b = \frac{3}{12}a$$

$$b = \frac{1}{4}a$$

$$P_1 = a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}a^2$$

$$P_2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 3$$

Odpowiedź. Stosunek pola większego prostokąta do pola mniejszego prostokąta jest równy 3.

Zadanie 5. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest dwa razy dłuższa od krawędzi podstawy. Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe polu powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości 5 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez a długość krawędzi podstawy graniastosłupa. Wtedy wysokość graniastosłupa jest równa $2a$.

Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi długości 5 cm jest równe

$$5 \cdot 5 \cdot 6 = 150 \text{ cm}^3$$

Pole powierzchni całkowitej Pc graniastosłupa

$$P_c = 2a^2 + 4 \cdot a \cdot 2a$$

$$P_c = 10a^2$$

Obliczenie długości krawędzi a

$$10a^2 = 150$$

$$a^2 = 15$$

$$a = \sqrt{15}$$

Wysokość graniastosłupa

$$h = 2a = 2\sqrt{15}$$

Objętość graniastosłupa

$$V = P_p \cdot h$$

$$V = 15 \cdot 2\sqrt{15}$$

$$V = 30\sqrt{15}$$

Odpowiedź. Objętość graniastosłupa jest równa $30\sqrt{15}$.