Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl kwietniowy - obowiązkowy
Poziom: szkoły podstawowe
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w szkole)

Zadania przeznaczone do rozwiązywania w szkole w formie sprawdzianu w czasie 90 minut. Cykl kwalifikuje, wg oceny szkoły, do finału zawodów

Zadanie 1.

Wyznacz cztery kolejne liczby naturalne, których iloczyn jest równy 1680.

Rozwiązanie:

Rozkładamy liczbę 1680 na czynniki pierwsze i przedstawiamy ją w postaci

$$1680 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7$$

Odpowiedź. Szukane liczby to 5, 6, 7, 8.

Zadanie 2.

W pewnej szkole, do której uczęszcza 1000 uczniów, jest 30 klas. Udowodnij, ze istnieje klasa, która liczy co najmniej 34 uczniów.

Rozwiązanie:

Zauważmy, że gdyby każda klasa liczyła co najwyżej 33 uczniów, to wszystkich uczniów byłoby co najwyżej 30x33=990. Ponieważ uczniów jest 1000, to musi istnieć klasa, która liczy co najmniej 34 uczniów.

c.n.d.

Zadanie 3.

Średnia wieku jedenastoosobowej drużyny piłkarskiej jest równa 22 lata. Średni wiek dziesięciu graczy bez bramkarza wynosi 21 lat. Ile lat ma bramkarz?

Rozwiązanie:

Wiek graczy bez bramkarza: $10 \cdot 21 = 210$

Wiek graczy z bramkarzem: $11 \cdot 22 = 242$

Wiek bramkarza: $242 – 210 = 32$

Odpowiedź. Bramkarz ma 32 lata.

Zadanie 4.

Rowerzysta pokonał trasę z prędkością 40km/h, po dojechaniu do celu natychmiast zawrócił i z powrotem jechał przez cały czas z prędkością 30km/h. Z jaką średnią prędkością rowerzysta pokonał całą trasę? Zapisz obliczenia. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Rozwiązanie:

Niech s oznacza długość trasy rowerzysty w jedną stronę.

Wtedy $2s$ jest długością całej trasy, jaką pokonał rowerzysta.

Niech t_1 oznacza czas, w jakim rowerzysta dojechał do celu, a t_2 czas powrotu rowerzysty

Wiemy, że prędkość rowerzysty była równa

$$V_1 = 40\frac{km}{h}$$

$$V_2 = 30\frac{km}{h}$$

Ponieważ $V = \frac{droga}{czas}$, to $czas = \frac{droga}{V}$.

Stąd obliczamy

$$t_1 = \frac{s}{\frac{40km}{h}} = s : \frac{40km}{h} = \frac{s}{1} \cdot \frac{h}{40km} = \frac{sh}{40km}$$

$$t_2 = \frac{s}{\frac{30km}{h}} = s : \frac{30km}{h} = \frac{s}{1} \cdot \frac{h}{30km} = \frac{sh}{30km}$$

oraz $$t_1 + t_2 = \frac{sh}{40km} + \frac{sh}{30km} = \frac{3sh}{120km} + \frac{4sh}{120km} = \frac{7sh}{120km}.$$

Wtedy

$$V_{średnia} = \frac{s+s}{t_1+t_2} = \frac{2s}{\frac{7sh}{120km}} = \frac{2s}{1} \cdot \frac{120km}{7sh} = \frac{240km}{7h} \approx 34{,}29\frac{km}{h}$$

Odpowiedź. Rowerzysta pokonał całą trasę ze średnią prędkością około $34{,}29\frac{km}{h}$

Zadanie 5.

W pewnym prostokącie jeden z boków skrócono, a drugi wydłużono o p% tak, że w rezultacie pole prostokąta zmniejszyło się o 9%. Oblicz p.

Rozwiązanie:

Niech x i y oznaczają długości boków prostokąta.

Wtedy pole prostokąta wynosi: $x \cdot y$

Zaś długości boków prostokąta po zmianie to:

$$x - p\% \cdot x = x \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad \text{i} \quad y + p\% \cdot y = y\left(1 + \frac{p}{100}\right), \quad \text{gdzie } p\% = \frac{p}{100}$$

Natomiast pole prostokąta po zmianie długości boków to:

$$x\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot y\left(1 + \frac{p}{100}\right) = 91\% \; x \cdot y$$

$$x \cdot y\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{91}{100} x \cdot y$$ *tu: dzielimy obustronnie przez* $x \cdot y$

Otrzymujemy równanie

$$\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{91}{100}$$

$$1 - \frac{p^2}{100^2} = \frac{91}{100}$$ *tu: odejmujemy 1 obustronnie*

$$-\frac{p^2}{100^2} = \frac{91}{100} - 1$$

$$-\frac{p^2}{100^2} = -\frac{9}{100}$$ *tu: mnożymy obustronnie przez* 100^2

$$-p^2 = -9 \cdot 100$$ *tu: dzielimy obustronnie przez (– 1)*

$$p^2 = 900$$

$$p = 30$$

Odpowiedź. $p = 30$.