XVIII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudniowy

Poziom: szkoły podstawowe

Zadanie 1. Wiadomo, że $f(x+1)=\frac{2f(x)+1}{2}$ oraz $f(2)=2$. Ile jest równe $f(0)$?

Rozwiązanie.

Przekształcając wzór (można też bez przekształcania) otrzymujemy

$$f(x)=\frac{2f(x+1)-1}{2}.$$

Wtedy podstawiamy $x=1$ i otrzymujemy

$$f(1)=\frac{2f(2)-1}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$

Następnie podstawiamy $x=0$

$$f(0)=\frac{2f(1)-1}{2}=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Odpowiedź. $f(0)=1$.

Zadanie 2. Z 1500 kg rudy żelaza usunięto 600 kg zanieczyszczeń. Zawierały one 12,5% żelaza. Procent żelaza w pozostałej rudzie zwiększył się o 20%. Ile kilogramów żelaza zawierała pozostała ruda?

Rozwiązanie:

x – zawartość procentowa żelaza w rudzie

1500 – 600 = 900 (kg) – masa rudy po usunięciu 600 kg zanieczyszczeń

x% · 1500 kg – masa żelaza w nieoczyszczonej rudzie

(*x* + 20)% · 900 kg – masa żelaza w rudzie oczyszczonej

12,5% · 600 kg – masa żelaza w zanieczyszczeniach

$$x\% \cdot 1500 = (x+20)\% \cdot 900 + 12{,}5\% \cdot 600$$

$$\frac{x}{100} \cdot 1500 = \frac{x+20}{100} \cdot 900 + \frac{12{,}5}{100} \cdot 600$$

$$15x = 9x + 180 + 75$$

$$6x = 255$$

$$x = 42{,}5\% \text{ - zawartość procentowa żelaza w rudzie}$$

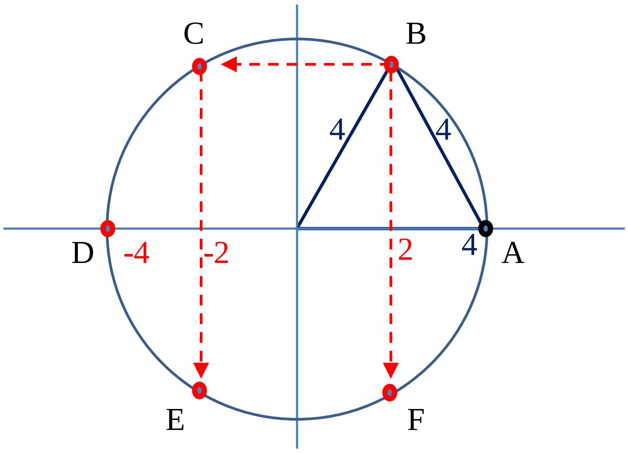
$$42{,}5\% + 20\% = 62{,}5\%$$

$$62{,}5\% \cdot 900 \text{ kg} = 562{,}5 \text{ kg}$$

Odpowiedź: W pozostałej rudzie było 562,5 kg żelaza.

Zadanie 3. Punkt (0,0) jest środkiem symetrii sześciokąta foremnego . Jednym z wierzchołków tego sześciokąta jest punkt A = (4,0). Oblicz współrzędne pozostałych wierzchołków.

Rozwiązanie.



Z rysunku widać, że wystarczy wyznaczyć wierzchołek B ponieważ współrzędne pozostałych wierzchołków wynikają z symetrii względem poszczególnych osi co oznaczono czerwonymi strzałkami, więc różnią się tylko znakami przy odpowiednich współrzędnych,

Wierzchołek B jest wierzchołkiem trójkąta równobocznego o boku 4, więc pierwsza współrzędna równa jest 2, a druga jest wysokością tego trójkąta

$$y = h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Wobec tego B = (2, 2 $\sqrt{3}$) i z symetrii C = (-2, 2 $\sqrt{3}$), D = (-4,0), E = (-2, -2 $\sqrt{3}$), F = (2, -2 $\sqrt{3}$)

Odpowiedź. A = (4,0), B = (2, 2 $\sqrt{3}$), C = (-2, 2 $\sqrt{3}$), D = (-4,0), E = (-2, -2 $\sqrt{3}$), F = (2, -2 $\sqrt{3}$)

Zadanie 4. W pewnym trójkącie | AB | = 48, | BC | = 4, a długość AC jest liczbą pierwszą . Oblicz długość boku AC.

Rozwiązanie.

W rozwiązaniu zadania korzystamy z warunku : $| b - c | < a < b + c$, który gwarantuje istnienie trójkąta o bokach a, b, c.

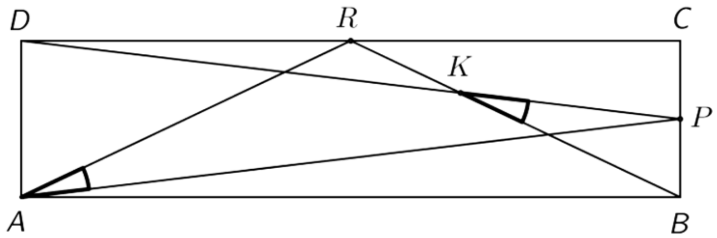
Stąd | | AB | - | BC | | < | AC | < | BC|

$|48 - 4| < |AC| < 48 + 4$, co jest równoważne warunkowi: $44 < |AC| < 52$.

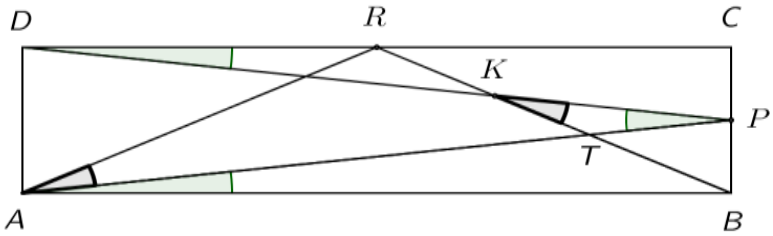
Liczbą pierwszą, która spełnia ten warunek jest liczba 47.

Odpowiedź. Bok $|AC| = 47$.

Zadanie 5. W prostokącie *ABCD* punkt *P* jest środkiem boku *BC*, punkt *R* – środkiem boku *CD,* a punkt *K* – punktem przecięcia odcinków *DP* i *BR*. Udowodnij, że miara kąta *PAR* jest równa mierze kąta *BKP*.



Rozwiązanie:



Niech $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle PAB| = \alpha$ (z przystawania trójkątów *ABC* i *CDP*) oraz $|\sphericalangle PAR| = \beta$.

Wtedy $|\sphericalangle RAB| = |\sphericalangle ABR| = \alpha + \beta$ (trójkąt *ABR* jest równoramienny).

Ponadto

$$|\sphericalangle DPA| = 180^o – (90^o – \alpha + 90^o – \alpha = 2\alpha.$$

Zatem $|\sphericalangle KTP| = |\sphericalangle ATB| = 180^o - 2\alpha – \beta$.

$$|\sphericalangle BKP| = 180^o – [(180^o - 2\alpha – \beta) + 2\alpha] = \beta = |\sphericalangle PAR|$$

c.b.d.o.