XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl grudniowy
Poziom: szkoła podstawowa

Zadanie 1.

Znajdź liczby, których NWW = 630, a NWD = 18 wiedząc, że liczby te nie dzielą się przez siebie.

Rozwiązanie:

Skoro $NWD = 18$, to liczby są postaci $a \cdot 18$ i $b \cdot 18$, gdzie $NWD(a,b) = 1$.

Wtedy $NWW = a \cdot b \cdot 18$, a stąd $NWW : 18 = a \cdot b$ czyli

$$a \cdot b = NWW : 18 = 630 : 18 = 35$$

$$a \cdot b = 35 = 5 \cdot 7$$

I liczba = 5 * 18 = 90

II liczba = 7 * 18 = 126

Odpowiedź. Są to liczby 90 i 126.

Zadanie 2.

Złotnik ma dwa stopy złota ze srebrem. W pierwszym stopie stosunek masy złota do srebra wynosi 2: 3, a w drugim 3 : 7. Ile musi wziąć każdego ze stopów, aby otrzymać 8 kg nowego stopu, w którym stosunek masy złota do srebra wynosi 5:11?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x ilość pierwszego stopu. Wtedy

x – pierwszy stop

$8 - x$ – drugi stop

Ilość złota w pierwszym i drugim stopie, to

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x)$$

i musi być równa $\frac{5}{16} \cdot 8$ w nowym stopie. Stąd otrzymujemy

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = \frac{5}{16} \cdot 8$$

$$\frac{2}{5}x + \frac{3}{10} \cdot 8 - \frac{3}{10}x = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{10}x = \frac{1}{10}$$

$$x = 1$$

Wtedy $8 - 1 = 7$.

Odpowiedź. Należy wziąć 1kg pierwszego stopu i 7 kg drugiego stopu.

Zadanie 3.

Pieszy wyruszył w drogę, a dwie godziny po nim wyjechał w tę samą stronę motocyklista. Jechał z prędkością 72km/h.
Z jaką prędkością szedł pieszy i jaką drogę przebył do momentu, gdy motocyklista dogonił go po 15 minutach jazdy?

Rozwiązanie:

Dane:

$V_{motocyklisty} = 72km/h$

$t_{pieszego} = 2h$ i $15min = 2\frac{15}{60}h = 2\frac{1}{4}h$

$t_{motocyklisty} = 15min = \frac{1}{4}h$

Szukane:

$s_{motocyklisty} = s_{pieszego} = ?$

$V_{pieszego} = ?$

$$V = \frac{s}{t} \quad \text{i} \quad s = V \cdot t$$

$$72km/h \cdot \frac{1}{4}h = s_{motocyklisty}$$

$$s_{motocyklisty} = 18km = s_{pieszego}$$

$$V_{pieszego} = 18km : 2\frac{1}{4}h = 18km : \frac{9h}{4} = \frac{72km}{9h} = 8km/h$$

Odpowiedź. Pieszy przebył 18 km z prędkością 8 km/h

Zadanie 4.

Z kartonu, którego 1 cm^2 waży 0,013 g, sklejono ostrosłup o podstawie kwadratu o boku 6 cm i wysokości każdej ściany bocznej 10 cm. Ile waży model tej bryły, jeżeli na "skrzydełka" potrzebne do sklejenia wykorzystano o 10% więcej powierzchni kartonu, niż wynosi siatka tego ostrosłupa.

Rozwiązanie:

Oznaczamy: P_p – pole podstawy, $P_{śb}$ – pole jednej ściany bocznej, P – pole całkowite

$$P_p = 6cm \cdot 6cm = 36cm^2$$

$$P_{śb} = 0{,}5 \cdot 6cm \cdot 10cm = 30cm^2$$

$$P = 36cm\ 2 + 4 \cdot 30cm\ 2 = 156cm^2$$

I wersja prawidłowa.

Z treści zadania: „na "skrzydełka"
potrzebne do sklejenia wykorzystano o 10% więcej powierzchni kartonu, niż wynosi siatka tego ostrosłupa." wynika, że wykorzystano 110%. Wobec tego same skrzydełka mają powierzchnię

$$1{,}1 \cdot 156\text{cm}^2 = 171{,}6\text{cm}^2$$

i całość potrzebnej powierzchni kartonu równa jest $156\text{cm}^2 + 171{,}6\text{cm}^2 = 327{,}6\ \text{cm}^2$ i waży

$$327{,}6 \cdot 0{,}013\text{g} = 4{,}2588\text{g}$$

Odpowiedź. Model tej bryły waży 4,2588g.

II wersja nieprawidłowa – ale pojawiająca się w rozwiązaniach

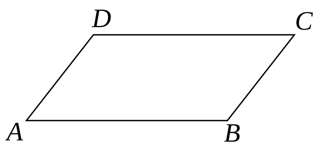
Dodajemy 10% na „skrzydełka" $1{,}1 \cdot 156\text{cm } 2 = 171{,}6\text{cm}^2$ i obliczamy ciężar

$$171{,}6 \cdot 0{,}013\text{g} = 2{,}2308\text{g}$$

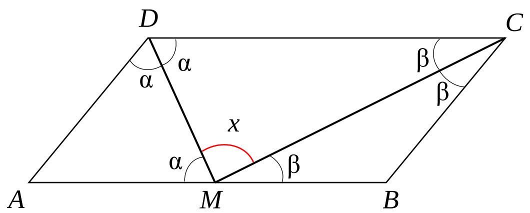
Odpowiedź. Model tej bryły waży 2,2308g .

Zadanie 5.

W równoległoboku ABCD bok AB jest 2 razy większy od boku BC. Punkt M dzielący bok AB na połowy połączono z punktami C i D. Uzasadnij, że kąt CMD jest prosty. Wykonaj rysunek pomocniczy.



Rozwiązanie:



Ponieważ bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC, to jego połowy AM i MB spełniają równanie

$$|AM| = |MB| = |AD| = |BC|$$

Zatem trójkąty AMD i MBC są równoramienne i

$$\measuredangle AMD = \measuredangle ADM = \alpha \quad \text{oraz} \quad \measuredangle MCB = \measuredangle CMB = \beta$$

Również

$$\measuredangle AMD = \measuredangle MDC = \alpha \text{ oraz } \measuredangle CMB = \measuredangle MCD = \beta$$

ponieważ są to kąty naprzemianległe

Kąty $\measuredangle ADC$ i $\measuredangle DCB$, to kąty sąsiednie równoległoboku zatem

$$2\alpha + 2\beta = 180^{o}$$

$$2(\alpha + \beta) = 180^{o}$$

$$\alpha + \beta = 90^{o}$$

$$\alpha + \beta + x = 180^{o}$$

$$\text{zatem } x = 90^{o}$$

Odpowiedź. Kąt DMC jest kątem prostym.