Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudniowy

Poziom: szkoły podstawowe, punktacja: 10 punktów za każde zadanie (czas: 90 minut)

Zadanie 1.

Jeden kran napełnia basen w ciągu 2 godzin, a drugi w ciągu 6 godzin. Ile czasu potrzeba na napełnienie basenu, jeżeli odkręcimy oba krany jednocześnie?

Rozwiązanie.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ - taka część wanny zostanie napełniona w ciągu 1 godz.

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{3}\text{ basenu} & \text{——} & 1\text{ godzina} \\ \downarrow :2 & & \downarrow :2 \\ \frac{1}{3}\text{ basenu} & \text{——} & 30\text{ minut} \\ \downarrow \cdot 3 & & \downarrow \cdot 3 \\ \text{cały basen} & \text{——} & 90\text{ minut} \end{array}$$

90 min = 1 godz. 30 min

Odpowiedź. Basen zostanie napełniony w czasie 1 godz. 30 min.

Zadanie 2.

Ile jest liczb: a) trzycyfrowych, b) stucyfrowych.

Rozwiązanie.

Mamy 10 cyfr: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

a) Liczba trzycyfrowa xyz składa się z dowolnych cyfr, ale pierwsza cyfra x nie może być zerem, bo liczba byłaby dwucyfrowa, czyli mamy $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ liczb trzycyfrowych.

b) Analogicznie mamy

$$9 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{99\text{ razy}} = 9 \cdot 10^{99}$$

liczb stucyfrowych.

Odpowiedź. a) mamy 900 liczb trzycyfrowych, b) $9 \cdot 10^{99}$ liczb stucyfrowych.

Zadanie 3.

Janek spędzał wakacje u dziadka na wsi. Każdego dnia, którego pomagał dziadkowi, dostawał od niego tyle, że mógł sobie z tego odłożyć 25 zł. Codziennie czy pracował, czy nie, wydawał na lody i inne przyjemności 15 zł.

Ile dni pomagał dziadkowi, jeśli przez 64 dni wakacji zaoszczędził 640 zł?

Rozwiązanie.

25 zł + 15 zł = 40 zł - tyle dostawał od dziadka za dzień pomocy

64 * 15 zł = 960 zł   - tyle wydał na przyjemności przez 64 dni wakacji

960 zł + 640 zł = 1600 zł   - tyle dostał od dziadka przez całe wakacje

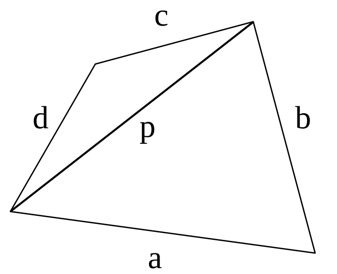
1600 zł :40 zł/dzień = 40 dni - tyle dni pomagał dziadkowi

Odpowiedź. Janek pomagał dziadkowi przez 40 dni.

Zadanie 4.

Czworokąt o obwodzie 4dm podzielono przekątną na dwa trójkąty o obwodach 26cm i 28cm. Oblicz długość tej przekątnej.

Rozwiązanie.



Wiemy, że $a+b+c+d=40\,cm$ oraz to, że

$p+(c+d)=26$ - obwód pierwszego trójkąta (góra rysunku),

$p+(a+b)=28$ - obwód drugiego trójkąta (na dole rysunku).

Gdy dodamy do siebie obwody tych trójkątów, to otrzymamy

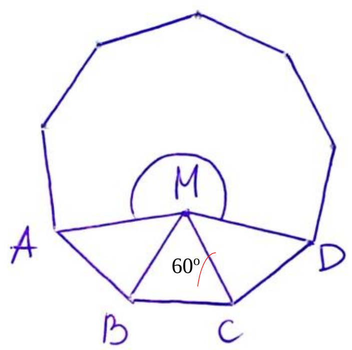
$$2p+\underbrace{(a+b+c+d)}_{\text{obwód czworokąta}}=26+28=54.$$

Ponieważ $a+b+c+d=40\,cm$, to $2p+40=54$ |-40 . Stąd $2p=14$ i $p=7$.

Odpowiedź. Przekątna ma długość 7 cm.

Zadanie 5.

Wewnątrz dziewięciokąta foremnego obrano punkt M w taki sposób, że trójkąt BMC jest równoboczny. Oblicz miarę kąta AMD (w dziewięciokącie foremnym wszystkie boki są równej długości, a wszystkie kąty mają 140 stopni).



Rozwiązanie.

Wiadomo, że kąt BCD ma miarę 140°, a kąt BCM 60°. Dlatego kąt $MCD=140^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.

Ponieważ bok trójkąt BCM jest równoboczny, to BC=MC=CD i trójkąt CDM jest równoramienny. Stąd

kąt $CMD=(180^\circ - 80^\circ):2 = 50^\circ$

Wobec tego kąt $AMD = 360^\circ - (2\cdot 50^\circ + 60^\circ) = 200^\circ$ lub (w zależności, który kąt zaznaczymy na rysunku) jego dopełnienie do kąta pełnego 160°.

Odpowiedź. 200° lub 160° stopni.