XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl styczniowy
Poziom: gimnazja, klasy 8 i 9
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.

Ustal ostatnią cyfrę liczby $(3^{11} + 2^{22} + 5^{33})^2$.

Rozwiązanie:

$3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = \cdots 3;\ \ 3^6 = \cdots 9; \dots;\ 3^{11} = \cdots 7$

$2^1 = 2;\ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ 2^4 = 16;\ \ 2^5 = \cdots 2; \dots;\ 2^{22} = \cdots 4$

$5^1 = 5;\ 5^2 = 25;\ 5^3 = 125;\ 5^4 = \cdots 5;\ \ 5^5 = \cdots 5; \dots;\ 5^{33} = \cdots 5$

7+4+5=16

Odpowiedź: Ostatnią cyfrą liczby $(3^{11} + 2^{22} + 5^{33})^2$ jest 6.

Zadanie 2.

Wiedząc, że NWD(x, y)=22, NWW(x, y)=924 oraz liczba x = 132. Wyznacz liczbę y.

Rozwiązanie:

$$NWD(x, y) \cdot NWW(x, y) = x \cdot y,$$

$$22 \cdot 924 = 132 \cdot y,$$

$$y = 154.$$

Odpowiedź. $y = 154$

Zadanie 3.

W pewnej liczbie trzycyfrowej *x* skreślono cyfrę setek i otrzymano dwucyfrową liczbę *k*. Gdy w liczbie *x* skreślono cyfrę dziesiątek, otrzymano liczbę dwucyfrową *l*, a po skreśleniu w liczbie *x* cyfry jedności powstała dwucyfrowa liczba *m*. Okazało się, że suma *k*+*l*+*m* jest trzykrotnie mniejsza od liczby *x*. Znajdź liczbę *x*.

Rozwiązanie:

Oznaczmy $x = 100a + 10b + c$. Wtedy $k = 10b + c,\quad l = 10a + c,\quad m = 10a + b$ oraz $k + l + m = 20a + 11b + 2c$. Z warunków zadania mamy:

$$3(20a + 11b + 2c) = 100a + 10b + c$$
$$23b = 40a - 5c$$
$$23b = 5(8a - c)$$

Ponieważ a, b, c to liczby od 0 do 9, więc b = 0 lub b = 5.

W pierwszym przypadku mamy $8a - c = 0$, czyli $c = 8a$, co daje jedyne rozwiązanie: a = 1 i c = 8. Wtedy jednak k = 8 nie jest liczbą dwucyfrową.

Gdy b = 5. mamy $23 \cdot 5 = 5(8a - c)$, czyli $8a - c = 23$, więc $8a = c + 23$. Otrzymujemy dwa rozwiązania: a = 3 i c = 1 lub a = 4 i c = 9. Tak więc x = 351 lub x = 459.

Odpowiedź. x = 351 lub x = 459.

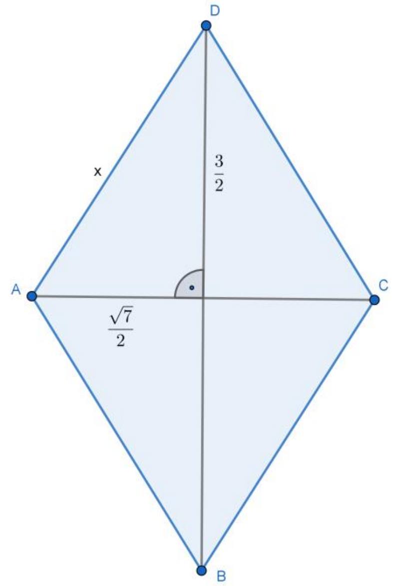
Zadanie 4.

Oblicz obwód rombu, którego przekątne mają długości 0,003km oraz $\sqrt{7}$m.

Rozwiązanie:

Przekątne rombu mają długości 0,003km=3m oraz $\sqrt{7}$m.

Możemy to zobrazować:



Widzimy, że do obliczenia długości boku rombu potrzebujemy tw. Pitagorasa.

$$x^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{9}{4} + \frac{7}{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2\ [m]$$

Zatem $Ob = 4 \cdot 2m = 8m$

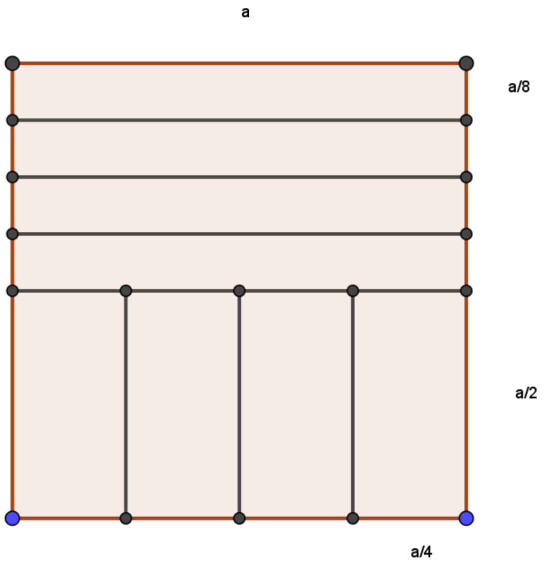
Odpowiedź. Obwód rombu jest równy 8 metrów.

Zadanie 5.

Martyna rozcięła kwadratową kartkę papieru na dwa jednakowe prostokąty. Każdy z nich złożyła tak, że otrzymała powierzchnie boczne dwóch różnych graniastosłupów prawidłowych czworokątnych. Suma objętości tych graniastosłupów jest równa $375 cm^3$. Ile jest równe pole kartki, którą Martyna miała na początku?

Rozwiązanie:

Oznaczmy prze a długość boku kwadratu. Podział na dwa prostokąty i zagięcia wyznaczają odcinki, których długość podana jest na rysunku ($a, \frac{a}{8}$ i $\frac{a}{2}, \frac{a}{4}$).



Objętości graniastosłupów są równe odpowiednio: $V_1 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{32}$ oraz $V_2 = \left(\frac{a}{8}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{64}$.

Ponieważ $V_1 + V_2 = 375$, to $\frac{a^3}{32} + \frac{a^3}{64} = 375$, stąd $a^3 = 8000$, czyli $a = 20$.

Pole kartki, którą Martyna miała na początku, jest równe $20^2 = 400$.

Odpowiedź. $400 cm^2$.