XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl styczniowy
Poziom: gimnazja

Zadanie 1.

Oblicz wartość wyrażenia bez używania kalkulatora i mnożenia pisemnego:

$$\frac{122018 \cdot 244035 - 122017}{122017 \cdot 244035 + 122018}$$

Rozwiązanie:

Wyrażenie można rozpisać np.:

$$\frac{122018 \cdot 244035 - 122017}{122017 \cdot 244035 + 122018} = \frac{(122017 + 1) \cdot (2 \cdot 122017 + 1) - 122017}{122017 \cdot (2 \cdot 122017 + 1) + (122017 + 1)}$$

Jeżeli za liczbę 122017 wstawimy *x* to otrzymamy:

$$\frac{(x+1) \cdot (2x+1) - x}{x \cdot (2x+1) + (x+1)} = \frac{2x^2 + x + 2x + 1 - x}{2x^2 + x + x + 1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1} = 1$$

Odpowiedź. Wartość tego wyrażenia jest równa 1.

Zadanie 2.

Jaka jest cyfra jedności wartości wyrażenia $17^{2018} + 13^{2018}$? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Niech n będzie wykładnikiem (n=1,2,3,4,…)

Zauważmy, że cyfry jedności w obu potęgach oraz w liczbie będącej ich sumą powtarzają się cyklicznie dla kolejnego n, a mianowicie :

dla 17^n są to cztery cyfry 7,9,3,1,…

dla 13^n są to również cztery cyfry 3,9,7,1,…

dla $17^n + 13^n$ to 0,8,0,2,…

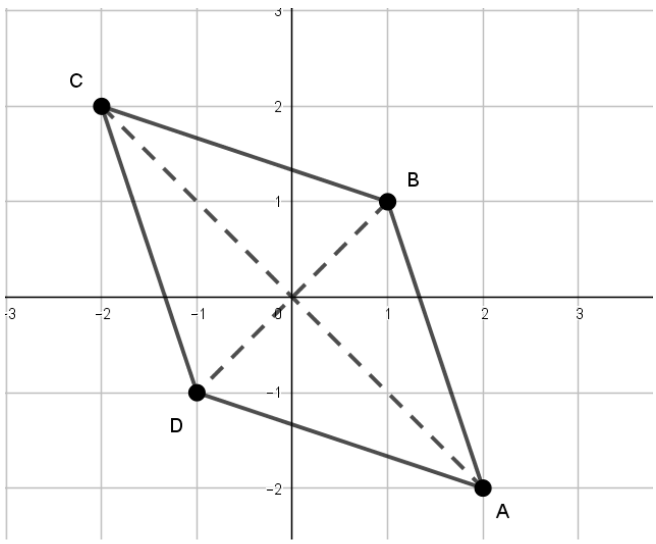
Przedstawmy to w tabeli:

n	1	2	3	4	5	6	7	…	2016	2018
Cyfra jedności liczby 17^n	…7	…9	…3	…1	…7	…9	…3	…	…1	…9
Cyfra jedności liczby 13^n	…3	…9	…7	…1	…3	…9	…7	…	…1	…9
Cyfra jedności wyrażenia 17^n+13^n	…0	…8	…0	…2	…0	…8	…0	…	…2	…8

Odpowiedź: Cyfra jedności wartości wyrażenia $17^{2018}+13^{2018}$ wynosi 8.

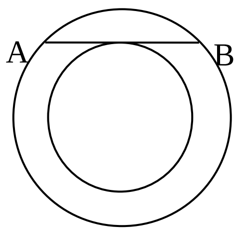
Zadanie 3.
Środkiem symetrii rombu jest punkt (0,0). Jednym z jego wierzchołków jest punkt (2, -2). Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu, jeśli jego pole wynosi 8.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez ABCD wierzchołki rombu, gdzie A= (2, -2). Ponieważ romb ma środek symetrii w punkcie (0,0), punkt C ma współrzędne (-2, 2). Zatem $|AC|=4\sqrt{2}$. Pozostałe wierzchołki leżą na prostej prostopadłej do prostej AC, więc równanie tej prostej to y = x. Pole rombu wynosi 8, a zatem $8=\frac{4\sqrt{2}\cdot|BD|}{2}$, z czego $|BD|=2\sqrt{2}$.
W takim razie $|OB|=\sqrt{2}$ i $|OD|=\sqrt{2}$.
Znaczy to, że B=(1,1) i D=(-1, -1).
Odp.: B=(1,1) , C=(-2,2) ,D=(-1, -1).



Zadanie 4.

Dane są dwa okręgi współśrodkowe. Cięciwa AB większego okręgu ma długość 40cm i jest styczna do mniejszego okręgu. Oblicz pole pierścienia kołowego utworzonego przez te okręgi



Rozwiązanie:

Pole pierścienia kołowego obliczymy ze wzoru $P = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$, gdzie R – promień większego okręgu, zaś r – promień mniejszego okręgu.

Wyłączając π przed nawias otrzymamy $P = \pi(R^2 - r^2)$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy $R^2 = r^2 + 20^2$, zatem $R^2 - r^2 = 20^2$, $R^2 - r^2 = 400$

Stąd $P = \pi(R^2 - r^2) = 400\pi cm^2$

Odpowiedź: $P = 400\pi cm^2$

Zadanie 5.

Stożek przecięto płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy i przecinającą wysokość stożka w stosunku 2:3. Oblicz stosunek objętości brył powstałych po rozcięciu.

Rozwiązanie:

Oznaczenia: r – dł. promienia stożka, H – dł. wysokości stożka

x- dł promienia stożka odciętego

I przypadek

Wysokość odciętego stożka to $\frac{2}{5}H$.

Promień stożka odciętego to: $\frac{\frac{2}{5}H}{x} = \frac{H}{r}$, $x = \frac{2}{5}r$

Objętość stożka: $V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 H$

Objętość stożka odciętego: $V_o = \frac{1}{3}\pi x^2 \cdot \frac{2}{5}H = \frac{2}{15}\pi \cdot \left(\frac{2}{5}r\right)^2 \cdot H = \frac{8}{375}\pi r^2 H$

Objętość części, która została po odcięciu stożka:

$$V_p = V_s - V_o = \pi r^2 H\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{375}\right) = \frac{39}{125}\pi r^2 H$$

Stosunek objętości powstałych po rozcięciu brył to:

$$\frac{V_o}{V_p} = \frac{\frac{8}{375}\pi r^2 H}{\frac{39}{125}\pi r^2 H} = \frac{8}{117} \quad \text{lub} \quad \frac{V_p}{V_o} = \frac{117}{8}.$$

II przypadek

Wysokość odciętego stożka to $\frac{3}{5}H$.

Promień stożka odciętego to:

$$\frac{\frac{3}{5}H}{x}=\frac{H}{r},\ x=\frac{3}{5}r$$

Objętość stożka: $V_s=\frac{1}{3}\pi r^2 H$

Objętość stożka odciętego: $V_o=\frac{1}{3}\pi x^2\cdot\frac{3}{5}H=\frac{3}{15}\pi\cdot\left(\frac{3}{5}r\right)^2\cdot H=\frac{27}{375}\pi r^2 H=\frac{9}{125}\pi r^2 H$

Objętość części, która została po odcięciu stożka:

$$V_p=V_s-V_o=\pi r^2 H\left(\frac{1}{3}-\frac{27}{375}\right)=\frac{98}{375}\pi r^2 H$$

Stosunek objętości powstałych po rozcięciu brył to:

$$\frac{V_o}{V_p}=\frac{\frac{27}{375}\pi r^2 H}{\frac{98}{375}\pi r^2 H}=\frac{27}{98}\ \text{lub}\ \frac{V_p}{V_o}=\frac{98}{27}.$$

Odpowiedź: I przypadek $\frac{8}{117}$ lub $\frac{117}{8}$, II przypadek $\frac{27}{98}$ lub $\frac{98}{27}$.