Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl grudniowy,

Poziom: gimnazjum, punktacja: 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.

Funkcja $f(n)$ dla każdej liczby naturalnej n większej od 0 jest taka, że:

$f(1) = a$ oraz $f(k+m) = f(k) + f(m)$ dla każdych liczb naturalnych k i m.

Zapisz wzór funkcji $f(n)$.

Rozwiązanie.

Mamy $f(1) = a$.

Następnie liczymy:

$f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a = 2a$

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 2a + a = 3a$

$f(4) = f(3+1) = f(3) + f(1) = 3a + a = 4a$

itd.…

Można zauważyć, że dla kolejnych liczb naturalnych wartość funkcji zwiększa się o a.

Stąd wniosek $f(n) = na$

Zadanie 2.

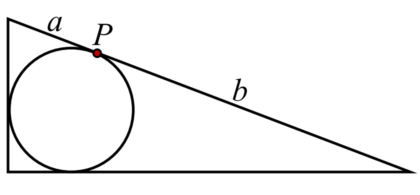
Kran A napełnia pół basenu w czasie o 5 godzin dłuższym, a kran B w czasie o 3 godziny krótszym niż trwa to wtedy, gdy oba krany napełniają cały basen jednocześnie. W jakim czasie napełni basen każdy z kranów osobno?

Rozwiązanie.

Jeśli oba krany napełniają cały basen w ciągu t godzin, to w ciągu jednej godziny napełniają $1/t$ basenu. Wówczas kran A napełnia basen w ciągu $2(t+5)$ godzin, a kran B w ciągu $2(t-3)$ godzin. Wobec tego w ciągu 1 godziny napełnią odpowiednio $\frac{1}{2(t+5)}$ i $\frac{1}{2(t-3)}$ basenu. Zatem razem napełnią część basenu będącą sumą powyższych wartości. Stąd otrzymujemy równanie $\frac{1}{2(t+5)} + \frac{1}{2(t-3)} = \frac{1}{t}$, którego jedynym rozwiązaniem jest liczba 15. Kran A napełni basen w ciągu 40 godzin, a kran B w ciągu 24 godzin.

Zadanie 3.

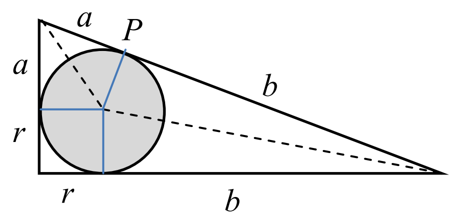
W trójkąt prostokątny wpisano okrąg. Punkt, w którym okrąg jest styczny do przeciwprostokątnej oznaczono literą *P*. Punkt *P* dzieli przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach a i b, jak na rysunku.



Uzasadnij, że pole tego trójkąta jest równe ab.

Rozwiązanie.

Zauważamy, że punkty styczności dzielą przyprostokątne na odcinki a i r oraz b i r.



Pole trójkąta można zapisać jako sumę pól 4 trójkątów prostokątnych i kwadratu:

$$P = r^2 + \frac{ar}{2} + \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{br}{2} = r^2 + ar + br$$

Z twierdzenia Pitagorasa: $(a+r)^2 + (b+r)^2 = (a+b)^2$

$$a^2 + 2ar + r^2 + b^2 + 2br + r^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2ar + 2r^2 + 2br = 2ab$$

$$P = r^2 + ar + br = ab$$

Zadanie 4.

Objętość ziemi wydobytej po wykopaniu rowu w kształcie prostopadłościanu wynosi 48 metrów sześciennych. Jakie są wymiary tego rowu, jeżeli jego długość jest o 6 m większa od głębokości, a szerokość rowu jest o 2m krótsza od jego głębokości?

Rozwiązanie.

Oznaczmy: a – szerokość, b – długość, h – głębokość rowu.

Z warunków zadania mamy:

$$b = h + 6 \quad , \quad a = h - 2 \quad \text{oraz} \quad 48 = abh$$

Stąd $48 = (h-2)(h+6)h = (h^2 + 6h - 2h - 12)h = h^3 + 4h^2 - 12h$, co po przeniesieniu na jedną stronę prowadzi do równania $h^3 + 4h^2 - 12h - 48 = 0$.

Grupując wyrażenia pierwsze z drugim i trzecie z czwartym otrzymujemy

$$h^3 + 4h^2 - 12h - 48 = h^2(h+4) - 12(h+4) = (h^2 - 12)(h+4) =$$
$$= (h - \sqrt{12})(h + \sqrt{12})(h+4) = 0$$

Jedynym dodatnim rozwiązaniem jest $h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Stąd $a = 2\sqrt{3} - 2$, $b = 2\sqrt{3} + 6$.

Zadanie 5.

Suma długości ramion trapezu równoramiennego stanowi $\frac{1}{3}$ sumy długości jego podstaw, a stosunek długości jego podstaw jest równy 7:5. Wyznacz miary kątów tego trapezu.

Rozwiązanie.

Oznaczmy: a - dłuższa podstawa, b - krótsza podstawa, c - ramię, α - kąt przy dłuższej podstawie.

Z warunków zadania otrzymujemy równości: $6c = a + b$ oraz $\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$.

Stąd $6c = a + b = a + \frac{5}{7}a = \frac{12}{7}a$, czyli $c = \frac{2}{7}a$, zaś $\frac{a-b}{2} = \frac{a - \frac{5}{7}a}{2} = \frac{1}{7}a$.

Wobec tego $\alpha = 60^\circ$. Zatem kąty naszego trapezu mają miary: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.