XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl marcowy
Poziom: gimnazja, klasy 8 i 9
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.

Dla jakich wartości n, gdzie n jest liczbą naturalną, wyrażenie $\frac{n^3+2n^2+2}{n+2}$ jest liczbą całkowitą?

Rozwiązanie:

Niech n jest liczbą naturalną. Wyrażenie $\frac{n^3+2n^2+2}{n+2}$ będzie liczbą całkowitą, jeśli licznik będzie podzielny przez mianownik.

Przekształcamy dane wyrażenie:

$$\frac{n^3+2n^2+2}{n+2}=\frac{n^2(n+2)+2}{n+2}=n^2+\frac{2}{n+2}.$$

Zauważmy, że wyrażenie będzie liczbą całkowitą, jeśli mianownik $n + 2$ będzie równy 1, –1 , 2 lub –2.

Gdy $n+2=1$, to $n=-1$, co jest sprzeczne z założeniem, że n jest liczbą naturalną.

Gdy $n+2=-1$, to $n=-3$, co jest sprzeczne z założeniem, że n jest liczbą naturalną.

Gdy $n+2=2$, to $n = 0$.

Gdy $n+2=-2$, to $n=-4$, co jest sprzeczne z założeniem, że n jest liczbą naturalną.

Odpowiedź. $n = 0$.

Zadanie 2.

Waga foczki wzrosła o 5%, a słoniątka o 5kg. Średnia waga obu zwierząt wzrosła o 4kg, czyli o 2%. Ile obecnie waży słoniątko, a ile foczka?

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez f wagę foczki, a przez s wagę słoniątka.

	waga początkowa	**wzrost wagi**
foczka	f	o 5%, czyli o $0{,}05f$
słoniątko	s	o 5 kg

Średnia waga obu zwierząt ($\frac{f+s}{2}$) wzrosła o 4 kg, czyli o 2%.

Zatem z informacji o wzroście możemy zapisać, że:

$$\frac{0{,}05f + 5}{2} = 4$$

Stąd $0{,}05f = 3$, czyli $f = 60$.

Zatem foczka ważyła 60 kilogramów.

Skoro 2% średniej wagi zwierząt jest równe 4 kg, to 100% wynosi 200 kg.

Zatem średnia waga zwierząt $\frac{f+s}{2} = 200$, a $f = 60$:

$$\frac{60 + s}{2} = 200$$

Stąd $s = 400 - 60 = 340$.

Obecnie ważą:

słoniątko – 340 kg + 5 kg = 345 kg

foczka – $1{,}05 \cdot 60 = 63$ [kg]

Odpowiedź. Obecnie słoniątko waży 345 kilogramów, a foczka 63 kilogramy.

Zadanie 3.

Punktualnie o godzinie dwunastej wskazówki zegara: minutowa i godzinowa pokrywają się. Oblicz, po jakim czasie wskazówki ponownie będą się pokrywały?

Rozwiązanie:

Wskazówka minutowa w ciągu minuty pokona $\frac{1}{60}$ tarczy zegara. Wskazówka godzinowa w ciągu minuty pokona $\frac{1}{60}$ część, ale drogi, którą pokona w ciągu pełnej godziny czyli $\frac{1}{60}$ z $\frac{1}{12}$ tarczy zegara. Wskazówki spotkają się krótko po godzinie pierwszej. Załóżmy, że wskazówka minutowa wykonała już pełny obrót i znajduje się ponownie na godzinie 12, a godzinowa na godzinie 1.

Jeżeli teraz od drogi, którą pokona wskazówka minutowa do chwili spotkania odejmiemy drogę, jaką pokona w tym czasie wskazówka godzinowa, to zostanie nam $\frac{5}{60}$ tarczy zegara.

Przyjmując za x ilość minut do spotkania od godziny pierwszej, otrzymamy równanie:

$$\frac{x}{60} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{60} \cdot x = \frac{5}{60}$$

Stąd $x = 5\frac{5}{11}$ min + pełna godzina od dwunastej do pierwszej.

Odpowiedź. Wskazówki ponownie będą się pokrywały po $65\frac{5}{11}$ min.

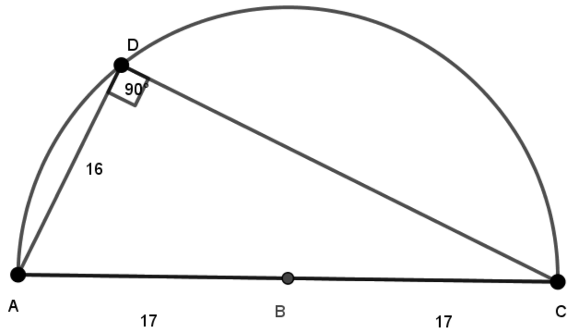
Zadanie 4.

Na płaszczyźnie dane są punkty A,B,C,D. Punkt B jest środkiem odcinka AC, a przy tym $|AB| = |BC| = |BD| = 17$ oraz $|AD| = 16$. Oblicz długość odcinka CD.

Rozwiązanie:

Z warunku $|AB| = |BC| = |BD| = 17$ wynika, że B jest środkiem okręgu na którym leży punkt D. Średnicą tego okręgu jest AC, czyli kąt ADC jest prosty.

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta
ACD wyznaczamy długość boku DC.



$|DC|^2 = |AC|^2 - |AD|^2$

$|DC|^2 = 34^2 - 16^2$

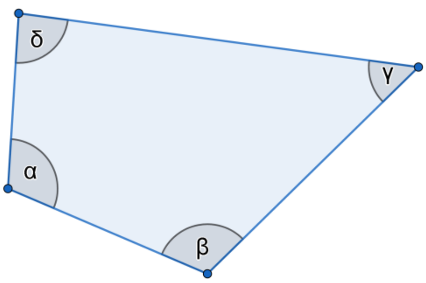
$|DC|^2 = 900$

$|DC| = 30$

Odpowiedź. Długość odcinka CD jest równa $|DC| = 30$.

Zadanie 5.
Różnica między miarami największego i najmniejszego kąta pewnego czworokąta jest równa 200°, a różnica między miarami średnich kątów to 20°. Ile kątów ostrych może mieć ten czworokąt?

Rozwiązanie:



Oznaczmy przez β największy kąt, przez γ najmniejszy kąt, a przez δ i α kąty średnie.

Z treści zadania mamy:

$$\beta - \gamma = 200° \text{ oraz } \alpha - \delta = 20°.$$

Więc

$$\beta = 200° + \gamma \text{ oraz } \alpha = 20° + \delta.$$

Suma miar kątów wewnętrznych czworokąta jest równa 360°, zatem

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$$

Podstawiając dostaniemy:

$$20° + \delta + 200° + \gamma + \gamma + \delta = 360°$$

Skąd:

$$2\delta + 2\gamma = 140°\text{, czyli } \delta + \gamma = 70°.$$

Zatem $\gamma < 70°$ oraz $\delta < 70°$, więc kąty γ i δ są ostre.

Skoro $\alpha = 20° + \delta$ oraz $\delta < 70°$, więc $\alpha < 90°$ (czyli też ostry).

Kąt $\beta = 200° + \gamma$. Zatem β jest większy niż $200°$, czyli nie jest ostry.

Odpowiedź. Ten czworokąt może mieć trzy kąty ostre.