XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl marcowy
Poziom: gimnazja
Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu”)

Zadanie 1.

Wyznacz wartość x z równania $(x+2^{2018})^2-(x-2^{2018})^2=2^{2018}$.

Rozwiązanie:

$$(x+2^{2018})^2-(x-2^{2018})^2=2^{2018}$$
$$x^2+2\cdot x\cdot 2^{2018}+2^{4036}-x^2+2\cdot x\cdot 2^{2018}-2^{4036}=2^{2018}$$
$$2\cdot x\cdot 2^{2018}+2\cdot x\cdot 2^{2018}=2^{2018} \quad |:2^{2018}$$
$$2x+2x=1$$
$$4x=1$$
$$x=\frac{1}{4}$$

Odpowiedź. Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{4}$.

Zadanie 2.

Wykaż, że $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}$ jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}=\frac{(\sqrt{1}-\sqrt{3})}{(\sqrt{1}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{1}-\sqrt{3})}+\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}+$$
$$\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{7})}+\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{9})}{(\sqrt{7}+\sqrt{9})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{9})}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{7-9}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{1-3}+$$
$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{7-9}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{-2}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{-2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{-2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{9}}{-2}=$$
$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{9}}{-2}=\frac{\sqrt{1}-\sqrt{9}}{-2}=\frac{1-3}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

Odpowiedź. Liczba 1 jest liczbą naturalną.

Zadanie 3.
W trapez równoramienny o ramionach długości 13 cm i krótszej postawie długości 5cm wpisano okrąg. Oblicz pole tego trapezu.

Rozwiązanie:

Korzystając z własności, że w czworokącie opisanym na okręgu sumy długości przeciwległych boków są jednakowe otrzymujemy:

$$2 \cdot c = a + b$$
$$2 \cdot 13 = a + 5$$
$$a = 21cm$$

, gdzie c = 13cm – długość ramienia

b =5cm – długość krótszej podstawy

a – długość dłuższej podstawy.

$x = (21-5) \div 2 = 8$ - długość przyprostokątnej trójkąta prostokątnego utworzonego w trapezie

Z twierdzenia Pitagorasa obliczamy wysokość trapezu:

$$h^2 + 8^2 = 13^2, \; h = \sqrt{105}$$

Pole trapezu: $P = \dfrac{(5+21) \cdot \sqrt{105}}{2} = 13\sqrt{105}cm^2$

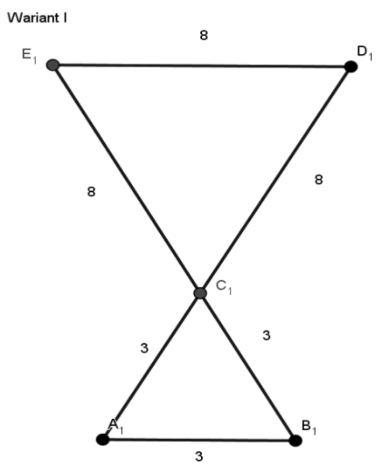
Odpowiedź. Pole trapezu jest równe $13\sqrt{105}cm^2$

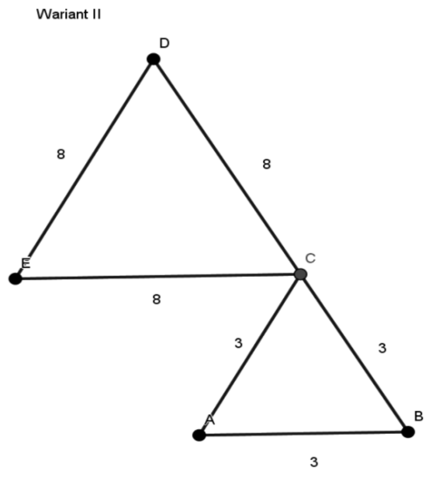
Zadanie 4.

Na oceanie jest 5 wysepek A, B, C, D, E. Niektóre odległości między nimi są znane, a mianowicie $|AB| = |BC| = |AC| = 3km$, $|CD| = |DE| = |EC| = 8km$, $|BD| = 11km$. Oblicz odległość wysepek A i E.

Rozwiązanie:

Punkty A, B, C są wierzchołkami trójkąta równobocznego, podobnie punkty C, D, E są wierzchołkami trójkąta równobocznego. Ponadto punkty B, C, D leżą na jednej prostej. Możliwe są dwa warianty położenia punktów:





W wariancie pierwszym punkty A, C, E leżą na jednej prostej i $|AE| = 11km$.

W wariancie drugim punkty Ai E leżą w tej samej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez prostą BD. Kąt ACE ma miarę 60°. Opuszczając wysokość AK w trójkącie ACE otrzymujemy trójkąt CKA, który jest połową trójkąta równobocznego o boku długości3. Zatem $|CK| = 1{,}5$ i $|AK| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Stąd $|EK| = 8 - 1{,}5 = 6{,}5$ oraz z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta EKA mamy

$$|AE|^2 = |AK|^2 + |EK|^2$$
$$|AE|^2 = \frac{27}{4} + 42{,}25$$
$$|AE|^2 = 49$$
$$|AE| = 7$$

Odpowiedź. Odległość między wyspami A i E wynosi 11 km lub 7 km

Zadanie 5.

Dany jest kwadrat i prostokąt. Jeden z boków prostokąta jest o 3 cm krótszy od boku kwadratu, a drugi bok prostokąta o 4 cm dłuższy od boku tego kwadratu. Jaka powinna być długość boku kwadratu, aby jego pole było większe od pola prostokąta? Podaj wszystkie rozwiązania, jeśli długość boku kwadratu jest liczbą naturalną.

Rozwiązanie:

bok kwadratu: a

pole kwadratu: a^2

boki prostokąta: $a+4$ i $a-3$

pole prostokąta: $(a+4)\cdot(a-3)$

Powstaje nierówność:

$$a^2 > (a+4)\cdot(a-3)$$

I wariant:

Sprawdzamy:

a = 1, 2, 3 nie pasuje bo pole prostokąta albo ujemne albo równe zero.

Pasuje:

a = 4, bo P_k = 16 i Pp = 8,

analogicznie sprawdzamy, że pasuje również a = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

II wariant:

Po wykonaniu mnożenia wyrażeń po prawej stronie nierówności:

$$a^2 > (a+4)\cdot(a-3)$$

otrzymujemy

$$a^2 > a^2 - 3a + 4a - 12$$

$$a^2 > a^2 + a - 12 \quad \Big| -a^2$$

$$0 > a - 12$$

czyli $a < 12$. Ponieważ boki prostokąta muszą być dodatnie $a - 3 > 0$, to $a > 3$.

Odpowiedź. Długość boku kwadratu jest jedna z liczb 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.