# Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
## Eliminacje – cykl marcowy,
## Poziom: gimnazjum, punktacja: 10 punktów za każde zadanie

**Zadanie 1.**
Dla każdej liczby wymiernej $w$ funkcja $f(w)$ jest taka, że: $f(w) > 0$, $f(1) = a > 0$ oraz $f(w+z) = f(w) \cdot f(z)$ dla każdych liczb wymiernych $w$ i $z$.

Oblicz wartości funkcji: a) $f(0)$, b) $f(-1)$, c) $f(\frac{3}{2})$.

**Rozwiązanie.**

Z równania $f(w+z) = f(w) \cdot f(z)$ podstawiając $w = 0, z = 0$ otrzymujemy $f(0) = f(0+0) = f(0) \cdot f(0)$, czyli równanie $f(0) = f(0) \cdot f(0)$. Po przeniesieniu na lewą stronę i wyłączeniu przed nawias $f(0)$ otrzymujemy równanie

$$f(0)(1 - f(0)) = 0,$$

które ma rozwiązania $f(0) = 0$ lub $f(0) = 1$

Stąd jedynym rozwiązaniem takim, że $f(w) > 0$ jest $f(0) = 1$.

Wstawiając $w = 1, z = -1$ do równania $f(w+z) = f(w) \cdot f(z)$ otrzymujemy

$$f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) \cdot f(-1).$$

Ponieważ $f(0) = 1$ i $f(1) = a > 0$, to $1 = a \cdot f(-1)$, a stąd $f(-1) = \frac{1}{a}$.

Wstawiając $w = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$ do równania $f(w+z) = f(w) \cdot f(z)$ otrzymujemy

$$f(1) = f(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = f(\tfrac{1}{2}) \cdot f(\tfrac{1}{2}).$$

Ponieważ $f(1) = a > 0$, to $a = \left(f(\frac{1}{2})\right)^2$, a stąd $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{a}$ ($f(w) > 0$).

Wtedy

$$f(\tfrac{3}{2}) = f(1 + \tfrac{1}{2}) = f(1) \cdot f(\tfrac{1}{2}) = a\sqrt{a}.$$

**Odpowiedź**. $f(0) = 1$, $f(-1) = \frac{1}{a}$, $f(\frac{3}{2}) = a\sqrt{a}$.

**Zadanie 2.**

Różnica kwadratów dwóch liczb całkowitych wynosi 29. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych mających tę własność.

**Rozwiązanie.**

Oznaczmy szukane liczby przez $x$ i $y$.

Z treści zadania mamy $x^2 - y^2 = 29$ co po zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia prowadzi do równania

$$(x - y)(x + y) = 29.$$

Liczbę 29 można w postaci iloczynu liczb całkowitych zapisać tylko na dwa sposoby

$29 = 1 \cdot 29$ lub $29 = (-1) \cdot (-29)$, więc

1. a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 29 \end{cases}$ lub b) $\begin{cases} x - y = 29 \\ x + y = 1 \end{cases}$

lub

2. c) $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -29 \end{cases}$ lub d) $\begin{cases} x - y = -29 \\ x + y = -1 \end{cases}$.

Pierwsza możliwość prowadzi w obu przypadkach a) i b) po dodaniu stronami do równania $2x = 30$ i w konsekwencji $x = 15$ . W przypadku a) otrzymujemy $x = 15$ i $y = 14$, w przypadku b) $x = 15$ i $y = -14$

Druga możliwość prowadzi w obu przypadkach c) i d) po dodaniu stronami do równania $2x = -30$ i w konsekwencji $x = -15$ . W przypadku c) otrzymujemy $x = -15$ i $y = -14$, w przypadku b) $x = -15$ i $y = 14$.

Odpowiedź. Szukane pary liczb to: $(15,14)$, $(15,-14)$, $(-15,14)$, $(-15,-14)$.

**Zadanie 3.**

Na wycieczce szkolnej zorganizowano zbiórkę. Liczba nieobecnych stanowiła $\frac{1}{6}$ liczby uczniów obecnych. Gdyby jeden z uczniów poszedł szukać spóźnialskich, liczba nieobecnych stanowiła $\frac{1}{5}$ liczby uczniów obecnych. Ilu uczniów brało udział w wycieczce i ilu spóźniło się na zbiórkę?

**Rozwiązanie.**

Niech $x$ oznacza liczbę wszystkich uczniów. Wobec tego, skoro nieobecni stanowili $nb = \frac{1}{6} ob$ liczby $ob$ uczniów obecnych. Wobec tego

$$x = nb + ob = \frac{1}{6} ob + ob = \frac{7}{6} ob,$$

co daje liczbę obecnych $ob = \frac{6}{7} x$ i liczbę nieobecnych $nb = \frac{1}{7} x$.

Następnie po odejściu jednego ucznia obecnych było pięć razy więcej niż nieobecnych

$$(ob - 1) = 5 \cdot (nb + 1), \text{ czyli } \frac{6}{7} x - 1 = 5 \cdot (\frac{1}{7} x + 1)$$

$$\frac{6}{7} x - 1 = \frac{5}{7} x + 5$$

$$\frac{6}{7} x - \frac{5}{7} x = 1 + 5, \text{ czyli } \frac{1}{7} x = 6 .$$

Stąd $x = 42$ oraz $\frac{1}{7} \cdot 42 = 6$

**Odpowiedź.** W wycieczce uczestniczyły 42 osoby. Na zbiórkę spóźniło się 6 osób.

**Zadanie 4.**
Długość krawędzi sześcianu zwiększono tak, że jego pole powierzchni całkowitej wzrosło o 69 %. O ile procent wzrosła objętość tego sześcianu.

**Rozwiązanie.**
Oznaczmy przez $a$ długość krawędzi sześcianu. Pole powierzchni sześcianu jest równe $6a^2$.
Pole powierzchni po zwiększeniu długości krawędzi jest równe

$$6a^2 + 0{,}69 \cdot 6a^2 = 10{,}14a^2.$$

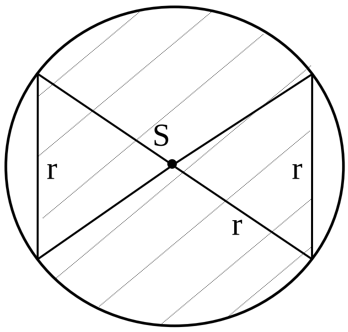
Krawędź powiększonego sześcianu ma długość $\sqrt{10{,}14a^2 : 6} = 1{,}3a$.

Objętość nowego sześcianu jest równa $(1{,}3a)^3 = 2{,}197a^3$.

Objętość sześcianu wzrosła zatem o $\left(\frac{2{,}197a^3 - a^3}{a^3}\right) \cdot 100\% = 119{,}7\%$.

**Odpowiedź**. Objętość sześcianu wzrosła zatem o $119{,}7\%$.

**Zadanie 5.**
Dwie cięciwy w kole są równoległe i równe promieniowi koła. Oblicz pole części koła zawartej między cięciwami, jeśli promień koła wynosi 6 cm.




**Rozwiązanie.**

Szukane pole możemy składa się z pól dwóch równobocznych trójkątów o boku $r$ oraz dwóch wycinków koła o kącie środkowym

$$\alpha = \frac{360^\circ - 2 \cdot 60^\circ}{2} = 120^\circ.$$

Pola dwóch trójkątów równobocznych o boku r równe są

$$2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} r^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\tfrac{1}{2} 6^2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 18\sqrt{3}.$$

Dwa wycinki koła mają pole równe

$$2 \cdot \left(\pi \cdot r^2 \cdot \frac{120}{360}\right) = \frac{2}{3} \cdot 36\pi = 24\pi.$$

Stąd pole szukanej figury równe jest $P = \left(24\pi + 18\sqrt{3}\right)$

**Odpowiedź**. Pole figury jest równe $\left(24\pi + 18\sqrt{3}\right)\ \mathrm{cm}^2$.