XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Kategoria:

klasa VIII szkoły podstawowej i III gimnazjum

Olsztyn, 16 maja 2019r.

Zad. 1. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \text{oraz} \quad 2x + 3y + 6z \geq 7$$

zachodzi warunek $7xy = z$.

Przykładowe rozwiązanie: Z drugiej nierówności, po podniesieniu obu stron do kwadratu, mamy

$$-4x^2 - 9y^2 - 36z^2 - 12xy - 24xz - 36yz \leq -49. \tag{1}$$

Z pierwszej zaś wynika, że

$$49x^2 + 49y^2 + 49z^2 \leq 49. \tag{2}$$

Dodając nierówności (1), (2), dostaniemy

$$45x^2 + 40y^2 + 13z^2 - 12xy - 24xz - 36yz \leq 0,$$

czyli

$$(3x - 2y)^2 + (6y - 3z)^2 + (2z - 6x)^2 \leq 0.$$

Wynika stąd, że we wszystkich wcześniejszych nierównościach muszą zachodzić równości oraz $3x = 2y$ i $2y = z$. Z równania $2x + 3y + 6z = 7$ dostajemy $(x, y, z) = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7})$, a wtedy $7xy = z$, co kończy dowód.
Komentarz : zadanie można też zrobić korzystając z odległości środka kuli od płaszczyzny.

Zad. 2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, takie że $p + 10$ oraz $p + 20$ są również liczbami pierwszymi.

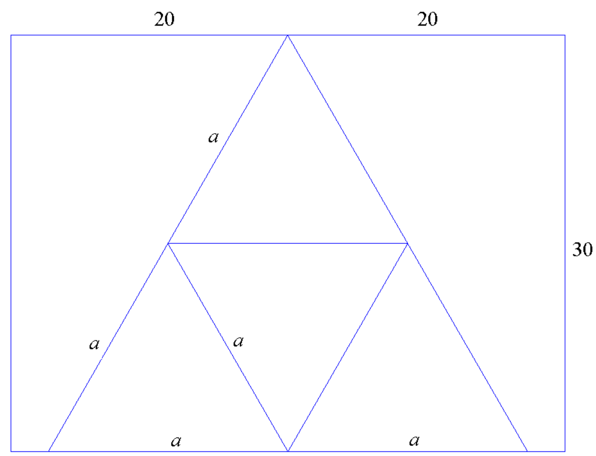
Przykładowe rozwiązanie: Po pierwsze zauważmy, że $p = 2$ nie spełnia warunków zadania, zatem szukane liczby pierwsze muszą być nieparzyste, można je więc przedstawić w postaci $p = 3k$ albo $p = 3k + 1$, albo $p = 3k + 2$ (gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą):

- Liczba $p = 3k$ jest pierwsza jedynie dla $k = 1$ i wtedy również liczby 13 i 23 są pierwsze.
- Dla liczb postaci $p = 3k + 1$ liczba $p + 20 = 3k + 21 = 3(k + 7)$, więc nie jest liczbą pierwszą.
- Dla liczb postaci $p = 3k + 2$ liczba $p + 10 = 3k + 12 = 3(k + 4)$, więc nie jest liczbą pierwszą.

Ostatecznie, jedyną liczbą o szukanej własności jest liczba $p = 3$.

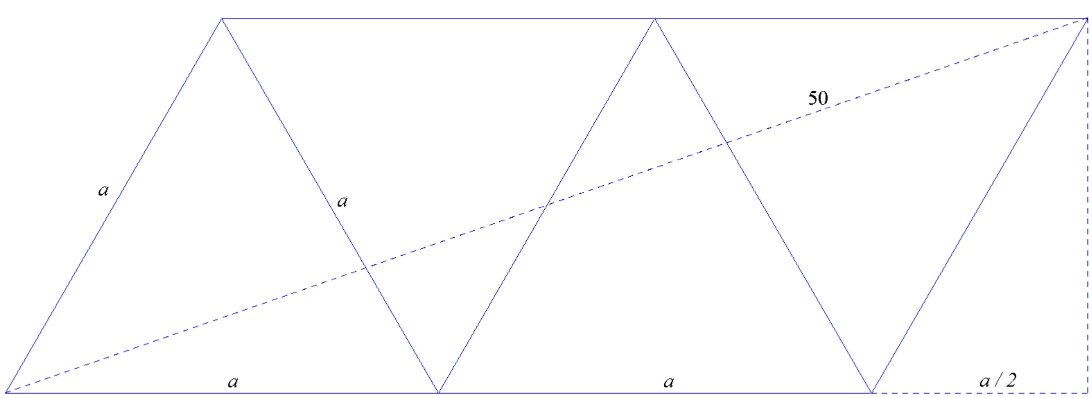
Zad. 3. Z prostokątnej kartki o wymiarach 30cm na 40cm wycięto siatkę czworościanu foremnego. Jaka powinna być długość krawędzi tego czworościanu tak, aby miał on możliwie największą objętość.

Przykładowe rozwiązanie: Oznaczmy krawędź czworościanu przez a. Zauważmy najpierw, że siatka czworościanu może być trójkątem równobocznym o boku długości $2a$ lub równoległobokiem o kącie ostrym $60°$ i bokach długości a i $2a$.



Rysunek 1: Zad. 3

W pierwszym przypadku podstawa największego trójkąta równobocznego mieszczącego się na kartce o wymiarach 30cm na 40cm będzie leżeć na boku długości 40cm, a jego wysokość będzie równa 30cm. Stąd, ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego $h = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, mamy że bok tej siatki wynosić będzie $20\sqrt{3}$cm. Zatem bok czworościanu będzie mieć wymiar $a = 10\sqrt{3}$cm.



Rysunek 2: Zad. 3

W drugim przypadku dłuższa przekątna największego równoległoboku o kącie ostrym 60° i bokach długości a i $2a$ mieszczącego się na kartce o wymiarach 30cm na 40cm będzie pokrywać się z przekątną prostokąta. Jak łatwo wyliczyć z twierdzenia Pitagorasa jej długość to 50cm. Zatem poszukujemy długości mniejszego boku równoległoboku o bokach długości a, $2a$ kącie ostrym 60° i przekątnej długości 50cm.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\left(\frac{5}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = 50^2.$$

Stad otrzymujemy, że $7a^2 = 2500$, a więc $a = 50\frac{\sqrt{7}}{7}$.

Objętość czworościanu jest wprost proporcjonalna do długości jego krawędzi, więc z faktu że $50\frac{\sqrt{7}}{7} > 16$ wynika, że krawędź czworościanu będzie równa $50\frac{\sqrt{7}}{7}$cm.

Zad. 4. Wewnątrz czworokąta wypukłego wyznacz punkt, którego suma odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

Przykładowe rozwiązanie: Oznaczmy kolejne wierzchołki czworokąta literami A, B, C, D. Zauważmy, dla każdego punktu wewnętrznego M nie leżącego na przecięciu jego przekątnych zachodzi nierówność

$$|AM| + |MC| + |BM| + |MD| > |AC| + |BD|.$$

Jeśli zaś ustalimy punkt M jako punkt przecięcia przekątnych, to otrzymamy równość

$$|AM| + |MC| + |BM| + |MD| = |AC| + |BD|.$$

Zatem szukany punkt musi znajdować się na przecięciu przekątnych czworokąta.

Zad. 5. Chcemy podzielić uczniów pewnej szkoły, których jest mniej niż 1000, na równoliczne grupy. Wiemy, że można podzielić ich na 11 takich grup. Natomiast gdy podzielimy ich na 7 równolicznych grup, to zostanie 1 osoba, a jeżeli podzielimy ich na 13 równolicznych grup, to zostanie 6 osób. Ile osób liczy szkoła?

Przykładowe rozwiązanie: Niech x oznacza ilość uczniów szkoły. Przedstawimy dwa możliwe sposoby rozwiązania tego zadania.

I sposób. Z warunków zadania mówiących, że dzieląc ilość uczniów na 7 grup, to zostanie 1 osoba, a dzieląc ich na 13 grup, to zostanie 6 osób wynika, że istnieją liczby naturalne k oraz n takie, że

$$x = 7k + 1 \qquad \text{oraz} \qquad x = 13n + 6.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez 13, a drugie przez 7 otrzymujemy

$$13x = 91k + 13 \qquad \text{oraz} \qquad 7x = 91n + 42.$$

Następnie mnożąc drugie równanie przez 2

$$13x = 91k + 13 \qquad \text{oraz} \qquad 14x = 2 \cdot 91n + 84$$

i odejmując stronami od drugiego pierwsze, mamy

$$x = 91(2n - k) + 71.$$

Wynika stąd, że liczba x przy dzieleniu przez 91 daje resztę 71. Zatem ilość uczniów tej szkoły może być równa 71 albo 71+91=162, albo 162+71=253, albo 253+91=344, itd. Liczbą mniejszą od 1000 spełniającą powyższy warunek, która dzieli się przez 11 jest 253.

II sposób. Rozwiązanie to opiera się na następujących własnościach kongruencji:

a) jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$, to $a + c \equiv b + c \pmod{n}$,

b) jeżeli $a \equiv b \pmod{n}$, to $a \cdot c \equiv b \cdot c \pmod{n}$.

Z faktu, że dzieląc ilość uczniów szkoły na 7 grup zostanie jedna osoba, mamy

$$x \equiv 1 \pmod{7}.$$

Co oznacza, że istnieje liczba naturalna k, taka że

$$x = 7k + 1. \tag{3}$$

Następnie wykorzystując informację, że dzieląc ilość uczniów szkoły na 13 grup zostanie 6 osób dostajemy

$$7k + 1 \equiv 6 \pmod{13}.$$

Stosujemy własność a) (dodajemy -1)

$$7k \equiv 5 \pmod{13}$$

oraz własność b) (mnożymy przez 2), mamy

$$14k \equiv 10 \pmod{13},$$

więc

$$k \equiv 10 \pmod{13}.$$

Zatem istnieje liczba naturalna l, taka że

$$\begin{aligned} k - 10 &= 13l \\ k &= 13l + 10. \end{aligned}$$

Stąd oraz (3), mamy

$$\begin{aligned} x &= 7(13l + 10) + 1 \\ x &= 91l + 71. \end{aligned} \tag{4}$$

Wobec tego oraz na mocy informacji, że x dzieli się bez reszty przez 11, otrzymujemy

$$91l + 71 \equiv 0 \pmod{11},$$

a na mocy własności kongruencji, możemy zapisać

$$\begin{aligned} 91l &\equiv -71 \pmod{11} \\ 3l &\equiv -5 \pmod{11} \\ 3l &\equiv 6 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Mnożąc przez 4, mamy

$$l \equiv 2 \pmod{11},$$

co oznacza, że istnieje liczba naturalna n, taka że

$$l - 2 = 11n$$
$$l = 11n + 2.$$

Ostatecznie, stąd oraz z (4) wynika, że

$$x = 91(11n + 2) + 71$$
$$x = 1001n + 253$$

Zatem $x = 253$.