XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Kategoria: Gimnazja

Olsztyn, 17 maja 2018

Zadanie 1.

Znajdź najmniejszą liczbę naturalną, która przy dzieleniu przez 20 daje resztę 17, przy dzieleniu przez 24 daje resztę 21, a przy dzieleniu przez 33 daje resztę 30.

Rozwiązanie:

Niech a będzie taką liczbą. Wtedy $a + 3$ dzieli się przez każdą z liczb 20, 24, 33. Zatem

$a + 3 = NWW(20,24,33) = 1320$.

Odpowiedź. $a = 1317$**.**

Zadanie 2.

Jubiler ma dwa kawałki stopu złota. W jednym jest 48g złota i 2g miedzi, a w drugim 36g złota i 60g miedzi. Ile trzeba wziąć z każdego kawałka stopu, żeby otrzymać 39g stopu, w którym jest 75% czystego złota.

Rozwiązanie:

<table>
<tr><th></th><th>ilość złota w g</th><th>ilość miedzi w g</th><th>razem</th><th>% złota</th><th>ilość stopu</th><th>ilość złota w g</th></tr>
<tr><td>stop1</td><td>48</td><td>2</td><td>50</td><td>48/50</td><td>x</td><td>48/50 x</td></tr>
<tr><td>stop2</td><td>36</td><td>60</td><td>96</td><td>36/96</td><td>y</td><td>36/96 y</td></tr>
<tr><td rowspan="2">stop3</td><td colspan="3" rowspan="2"></td><td rowspan="2">3/4</td><td>x+y</td><td>48/50 x +36/96 y</td></tr>
<tr><td>39</td><td>3/4*39</td></tr>
</table>

Dostajemy równości $x + y = 39$ oraz

$$\frac{48}{50}x + \frac{36}{96}y = \frac{3 \cdot 39}{4}$$

$\frac{24}{25}x + \frac{3}{8}y = \frac{3 \cdot 39}{4}$ $\quad$ $\frac{24}{25}x + \frac{3}{8}(39 - x) = \frac{3 \cdot 39}{4}$ $\quad$ $\frac{24}{25}x + \frac{3 \cdot 39}{8} - \frac{3}{8}x = \frac{3 \cdot 39}{4}$

$\left(\frac{24}{25} - \frac{3}{8}\right) x + \frac{3 \cdot 39}{8} = \frac{3 \cdot 39}{4}$ $\quad$ $\left(\frac{24 \cdot 8}{25 \cdot 8} - \frac{3 \cdot 25}{8 \cdot 25}\right) x = \frac{3 \cdot 39}{8}$ $\quad$ $\frac{117}{25 \cdot 8}x = \frac{3 \cdot 39}{8}$

$x = \frac{3 \cdot 39 \cdot 25 \cdot 8}{8 \cdot 117}$

Odpowiedź. $x = 25$, $y = 14$

Zadanie 3.

Wiadomo, że liczba $x+\frac{1}{x}$ jest całkowita. Pokaż, że liczby $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^4+\frac{1}{x^4}$ są całkowite.

Rozwiązanie:

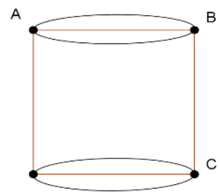
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2} = 2+x^2+\frac{1}{x^2}$ Stąd $x^2+\frac{1}{x^2}$ jest całkowita.

Podstawiając x^2 za x w powyższym wyrażeniu dostajemy, że $x^4+\frac{1}{x^4}$ jest całkowita.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) = \left(2+x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right) = 2x+\frac{2}{x}+x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3} =$$

$= 3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\ x^3+\frac{1}{x^3}$ Stąd $x^3+\frac{1}{x^3}$ jest całkowita

Zadanie 4.



W pewnym procesie technologicznym automat przesuwa magnes po powierzchni stalowego walca z punktu A do punktu C. Należy wybrać najkrótszą możliwą drogę. Rozważane są dwie metody. Pierwsza polega na przechodzeniu wzdłuż średnicy podstawy z punktu A do B, a następnie wzdłuż odcinka BC. Druga metoda, to wyznaczenie najkrótszej drogi po powierzchni bocznej walca.

Którą metodę wybrać, gdy wysokość walca jest równa średnicy jego podstawy? Czy ta sama metoda jest lepsza, gdy wysokość walca jest równa promieniowi jego podstawy? Uzasadnij odpowiedź.

Rozwiązanie: Niech h oznacza wysokość, a d- średnicę walca

Metoda 1: droga magnesu to $s1 = h+d$, $s1^2 = h^2+2hd+d^2$

Metoda 2: droga magnesu to $s2 = \sqrt{\left(\pi\frac{d}{2}\right)^2+h^2}$, $s2^2 = \left(\pi\frac{d}{2}\right)^2+h^2$

Jeżeli d=h, to $s1^2 = 4h^2$, $s2^2 = \left(\pi\frac{h}{2}\right)^2+h^2 = h^2(\frac{\pi^2}{4}+1)$.

Musimy porównać $s1^2\ i\ s2^2$. Czyli też $4h^2\ i\ h^2(\frac{\pi^2}{4}+1)$, oraz $4\ i\ \frac{\pi^2}{4}+1$, i ostatecznie musimy porównać $12\ i\ \pi^2$. Wiemy, że

$\pi < 3{,}2, więc\ \pi^2 < 10{,}24 < 12$. Stąd metoda 2 wygrywa.

Uwaga: wstawienie $\pi = 3{,}14$ nie dowodzi tej nierówności, bo $\pi > 3{,}14$.

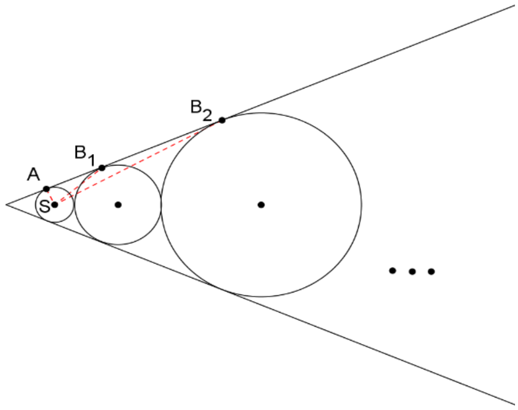
Podobne rozumowanie przeprowadzimy w przypadku $d = 2h$. Wtedy

$s1^2 = 9h^2$, $s2^2 = (\pi h)^2+h^2 = h^2(\pi^2+1)$.

Musimy teraz porównać 9 $i\ \pi^2+1$ czyli 8 $i\ \pi^2$. Wiemy, że $\pi > 3$, więc $\pi^2 > 9 > 8$. Metoda 1 wygrywa.

Odpowiedź. Należy wybrać pierwszą metodę.

Zadanie 5.



W kąt o mierze równej 60^o wpisano okrąg o promieniu 2. Niech S oznacza środek tego okręgu i niech A będzie punktem styczności tego okręgu z jednym z ramion kąta. Teraz wpisujemy w ten kąt $n > 2$ okręgów w taki sposób jak przedstawiono na rysunku obok, to znaczy, każdy kolejny okrąg ma większy promień od poprzedniego i jest styczny do poprzedniego. Punkty styczności tych okręgów z ramieniem kąta oznaczone są symbolami $B_1, \ldots, B_n$. Oblicz pola trójkątów ASB_1 i ASB_2 oraz ASB_n.

Rozwiązanie:

Niech O oznacza wierzchołek kąta, $r_1, \ldots, r_n$ promienie, a $S_1, \ldots, S_n$ środki kolejnych okręgów. Ponieważ miara kąta jest 60^o, to |OS|=2r=4, |AS|=r=2, |OA|=$\frac{2r\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

$2r_1 = 3r + r_1$, $r_1 = 3r = 6$, $|OB_1| = 6\sqrt{3}$, $|AB_1| = |OB_1| - |OA| = 4\sqrt{3}$.

Analogicznie, $2r_2 = 3r_1 + r_2$, $r_2 = 3r_1 = 18$, $|OB_2| = 18\sqrt{3}$, $|AB_2| = 16\sqrt{3}$

Zauważamy, że każdy kolejny okrąg ma promień 3 razy dłuższy od poprzedniego.

Zatem $r_n = 3^n \cdot 2$, $|OB_n| = 3^n\sqrt{3}$, $|AB_n| = 3^n \cdot 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (3^n \cdot 2 - 2)\sqrt{3}$.

Pole trójkąta ASB_1 jest równe $\frac{r \cdot |AB_1|}{2} = |AB_1| = 4\sqrt{3}$.

Pole trójkąta ASB_2 jest równe $\frac{r \cdot |AB_2|}{2} = |AB_2| = 16\sqrt{3}$.

Pole trójkąta ASB_n jest równe $|AB_n| = (3^n \cdot 2 - 2)\sqrt{3}$.

Odpowiedź. Pole trójkąta ASB_1 jest równe $4\sqrt{3}$, pole trójkąta ASB_2 jest równe $16\sqrt{3}$, pole trójkąta ASB_n jest równe $(3^n \cdot 2 - 2)\sqrt{3}$.