XV WARMIŃSKO – MAZURSKIE ZAWODY MATEMATYCZNE

Poziom: gimnazja

Olsztyn, 18.05.2017

Zadanie 1.

Oblicz $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$.

Rozwiązanie:

Sposób a:

$$\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2=8-2\sqrt{(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})}=8-2\sqrt{9}=2$$

Stąd $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}=\sqrt{2}$, ponieważ $\sqrt{4+\sqrt{7}}>\sqrt{4-\sqrt{7}}$.

Zatem $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$.

Sposób b:

$$\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}-2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}-\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}-2\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1+\sqrt{7}|-|1-\sqrt{7}|-2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{7}+1-\sqrt{7}-2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0=0.$$

Odpowiedź. $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}=0$

Zadanie 2.

Basen opróżnia się przez otwór w dnie w ciągu 4 godzin. Jeden z kranów napełnia basen w ciągu 1 godziny, a drugi w ciągu 2 godzin. Otwieramy obydwa krany i otwór w dnie. Oblicz w jakim czasie napełnimy basen.

Rozwiązanie:

W ciągu jednej godziny napełnimy $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ basenu.

Zatem $\frac{1}{4}$ basenu napełnimy w ciągu $\frac{60\,min}{5}=12\,min$,

a cały basen w ciągu $4\cdot 12\,min=48\,min$.

Odpowiedź. Basen napełnimy w czasie 48 minut.
Zadanie 3.

Paweł mówi do Marcina: „Mam 3 razy więcej lat niż ty miałeś wtedy, kiedy ja miałem tyle lat, ile masz teraz. Kiedy osiągniesz mój wiek, będziemy mieli łącznie 112 lat”. Ile lat mają Paweł i Marcin?

Rozwiązanie:

	obecnie	przed laty	za (x-y) lat
wiek Pawła	x	y	x+(x-y)
wiek Marcina	y	y-(x-y)	x

Z warunków zadania wynika, że:

$$\begin{cases} x = 3 \cdot [y - (x - y)] \\ x + (x - y) + x = 112 \end{cases}$$

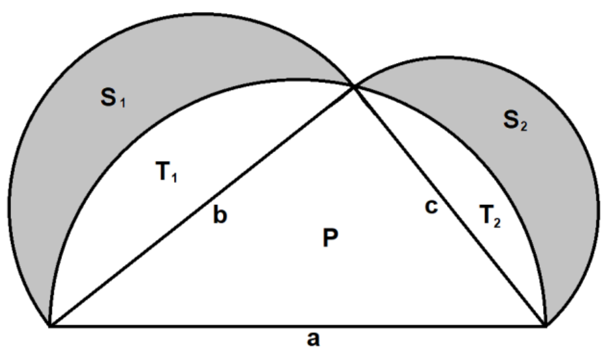
$$\begin{cases} 6y - 4x = 0 \\ 3x - y = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 48 \\ y = 32 \end{cases}$$

Odpowiedź. Obecnie Paweł ma 48 lat, a Marcin 32 lata.

Zadanie 4.

Ze środków boków trójkąta prostokątnego zakreślono 3 półokręgi o średnicach długości boku, z którego okrąg został zakreślony. Wykaż, że suma pól zacieniowanych figur (księżyce Hipokratesa) jest równa polu trójkąta.



Rozwiązanie:

Z warunków zadania otrzymujemy równania:

Pole półkola o średnicy a: $T_1 + T_2 + P = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2$.

Pole półkola o średnicy b: $S_1 + T_1 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}b\right)^2$.

Pole półkola o średnicy c: $S_2 + T_2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}c\right)^2$.

Po dodaniu stronami dwóch ostatnich równań mamy:

$$S_1 + T_1 + S_2 + T_2 = \frac{1}{8}\pi \cdot (b^2 + c^2).$$

Z pierwszego równania mamy: $T_1 + T_2 = \frac{1}{8}\pi a^2 - P$.

Stąd

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2) - (T_1 + T_2) = \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2) - \left(\frac{1}{8}\pi a^2 - P\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2 - a^2) + P.$$

Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $b^2 + c^2 = a^2$, czyli $b^2 + c^2 - a^2 = 0$.

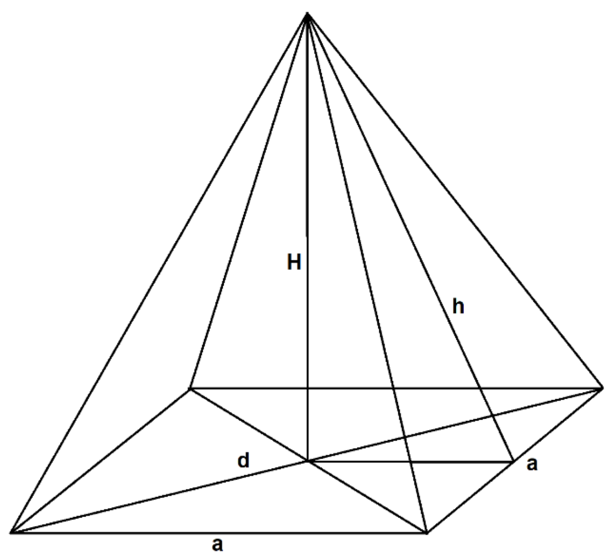
Zatem

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{8}\pi \cdot 0 + P = P.$$

Odpowiedź. $S_1 + S_2 = P$.

Zadanie 5.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni bocznej stanowi $\frac{4}{3}$ pola podstawy. Oblicz objętość tego ostrosłupa wiedząc, że przekątna podstawy ma długość $3\sqrt{2}$.



Rozwiązanie:

$d = 3\sqrt{2}$

Długość przekątnej podstawy:

$d = a\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

Stąd $a = 3$.

Z warunków zadania mamy:

$P_b = \frac{4}{3}P_p$

$4 \cdot \frac{1}{2}a \cdot h = \frac{4}{3}a^2$

$2h = \frac{4}{3}a$

Stąd $h = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$.

Z twierdzenia Pitagorasa mamy: $H = \sqrt{h^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$

$$H = \sqrt{4 - (1{,}5)^2} = \sqrt{1{,}75}$$

Zatem

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \sqrt{1{,}75} = 3\sqrt{1{,}75}.$$

Odpowiedź. Objętość ostrosłupa jest równa $V = 3\sqrt{1{,}75}$.