XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl lutowy

Poziom: gimnazja, klasy 8 i 9

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu")

Zadanie 1.

Różnica między czwartymi potęgami pewnych dwóch liczb naturalnych jest równa 24465, a różnica między drugimi potęgami tych liczb wynosi 105. Ile wynosi suma tych liczb?

Rozwiązanie:

Oznaczmy szukane liczby jako *x* oraz *y*.

Wiemy, że $x^4 - y^4 = 24465$ oraz $x^2 - y^2 = 105$.

Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia:

$$x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$24465 = 105 \cdot (x^2 + y^2)$$

$$x^2 + y^2 = 24465 : 105 = 233$$

Zatem:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 233 \\ x^2 - y^2 = 105 \end{cases}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$2x^2 = 338$$

$$x^2 = 169$$

$$\boldsymbol{x = 13} \ lub \ x = -13 \ (to\ nie\ jest\ liczba\ naturalna)$$

$$y^2 = 64$$

$$\boldsymbol{y = 8} \ lub \ y = -8 \ (to\ nie\ jest\ liczba\ naturalna)$$

Zatem $13 + 8 = 21$

Odpowiedź. Suma tych liczb wynosi 21.

Zadanie 2.

Jeśli liczbę dwucyfrową podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 5 i resztę 11. Jeśli zaś w tej liczbie przestawimy cyfry i otrzymaną liczbę podzielimy przez sumę jej cyfr, to otrzymamy 5 i resztę 2. Wyznacz tę liczbę.

Rozwiązanie:

Niech $10x + y$ oznacza liczbę dwucyfrową. Wówczas z warunków zadania wynika układ:

$$\begin{cases} 10x + y = 5(x+y) + 11 \\ 10y + x = 5(x+y) + 2 \end{cases},$$

który przekształcamy równoważnie i otrzymujemy : $\begin{cases} x = 7 \\ y = 6 \end{cases}$.

Odpowiedź. Warunki zadania spełnia liczba 76.

Zadanie 3.

Dziadek rozdał swoim wnukom pewną liczbę orzechów. Pierwszy wnuk otrzymał jeden orzech i $\frac{1}{9}$ reszty, drugi dwa orzechy i $\frac{1}{9}$ reszty, trzeci wnuk 3 orzechy i $\frac{1}{9}$ reszty i tak dalej, aż do momentu, gdy dziadek rozdał wszystkie orzechy każdemu po równo. Ile było orzechów i ilu wnuków obdzielił nimi dziadek?

Rozwiązanie:

Oznaczmy: x – liczba wszystkich orzechów, n – liczba wnuków

Pierwszy wnuk otrzymał $1 + \frac{1}{9}(x-1)$, czyli $\frac{8}{9} + \frac{1}{9}x$

Reszta to $\frac{8}{9}x - \frac{8}{9}$

Drugi wnuk otrzymał $2 + \frac{1}{9}(\frac{8}{9}x - \frac{8}{9} - 2)$, czyli $\frac{136}{81} + \frac{8}{81}x$

Ponieważ każdy wnuk otrzymał tyle samo, to $\frac{8}{9} + \frac{1}{9}x = \frac{136}{81} + \frac{8}{81}x$.

Stąd $x = 64, n = 8$

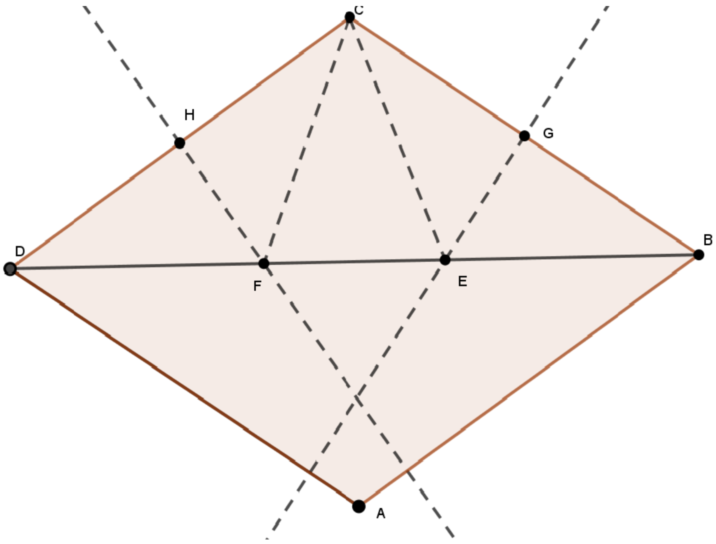
Odpowiedź. Liczba orzechów: 64, liczba wnuków: 8.

Zadanie 4.

Symetralne dwóch sąsiednich boków rombu wychodzących z wierzchołka kąta rozwartego dzielą jedną z jego przekątnych na trzy równe części. Oblicz miary kątów tego rombu.

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że punkty F, E dzielą przekątną DB na trzy równe części. Oznaczmy długość każdej z części przez a. Punkt F leży na symetralnej odcinka DC, więc $|FD| = |FC| = a$, podobnie $|EB| = |EC| = a$ oraz $|FE| = a$, więc trójkąt FEC jest równoboczny. Oznaczmy $|\angle DBC| = \alpha$. Wtedy otrzymujemy :



$\alpha = |\angle EBG| = |\angle ECG| = |\angle FDH| = |\angle FCH|$.

W trójkącie DBC: $180^\circ = 4\alpha + 60^\circ$, czyli $\alpha = 30^\circ$.

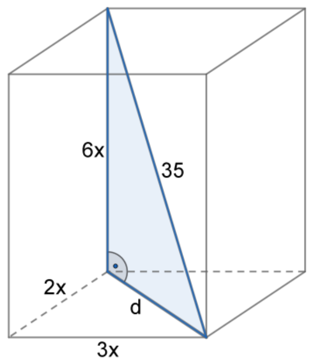
Odpowiedź. Kąty rombu mają miary: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.

Zadanie 5.

Oblicz objętość prostopadłościanu, którego przekątna jest równa 35, a krawędzie są w stosunku 2 : 3 : 6.

Rozwiązanie:

Przedstawiając dane z zadania na rysunku otrzymamy:



Do obliczenia objętości prostopadłościanu potrzebne nam będą długości krawędzi.

Korzystając z tw. Pitagorasa możemy zapisać dwa równania:

$$d^2 = (2x)^2 + (3x)^2$$

oraz

$$d^2 + (6x)^2 = 35^2$$

Po przekształceniu pierwszej równości dostajemy, że $d^2 = 13x^2$.

Wstawiając do drugiej równości otrzymujemy:

$$13x^2 + (6x)^2 = 35^2$$

$$49x^2 = 1225$$

Skąd $x = 5$.

Zatem krawędzie tego prostopadłościanu mają długości $2x = 10$, $3x = 15$, $6x = 30$.

Objętość będzie więc równa $V = 10 \cdot 15 \cdot 30 = 4500$.

Odpowiedź. Objętość prostopadłościanu jest równa 4500.