XVI Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl lutowy

Poziom: gimnazja

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w „domu")

Zadanie 1.

Oblicz $(10^{12} + 5^{11} \cdot 2^9 - 5^{13} \cdot 2^8) : (4 \cdot 5^5 \cdot 10^6)$.

Rozwiązanie.

$$(10^{12} + 5^{11} \cdot 2^9 - 5^{13} \cdot 2^8) : (4 \cdot 5^5 \cdot 10^6) =$$
$$= (5^{12} \cdot 2^{12} + 5^{11} \cdot 2^9 - 5^{13} \cdot 2^8) : (2^2 \cdot 5^5 \cdot 5^6 \cdot 2^6) =$$
$$= \frac{5^{12} \cdot 2^{12} + 5^{11} \cdot 2^9 - 5^{13} \cdot 2^8}{2^2 \cdot 5^5 \cdot 5^6 \cdot 2^6} = \frac{5^{11} \cdot 2^8 \cdot (5^1 \cdot 2^4 + 2^1 - 5^2)}{2^8 \cdot 5^{11}} =$$
$$= 5 \cdot 16 + 2 - 25 = 57$$

Odpowiedź. Wartość podanego wyrażenia jest równa 57.

Zadanie 2.

Liczby: -750, -600, 150 są wartościami wyrażeń: $x^2 - x^4, x^2 - x^3, x^3 - x^4$ dla pewnego x całkowitego (kolejność liczb nie musi być zgodna z kolejnością wyrażeń). Ile wynosi liczba x ?

Rozwiązanie.

Mamy:

$$x^2 - x^4 = x^2(1-x^2), \quad x^2 - x^3 = x^2(1-x), \quad x^3 - x^4 = x^3(1-x).$$

Jeśli x jest liczbą całkowitą, to wartość wyrażenia $x^3 - x^4 = x^3(1-x)$ dzieli się przez trzecią potęgę tej liczby.

Z rozkładów :
$$-750 = -2 \cdot 3 \cdot 5^3$$
$$-600 = -2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$
$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

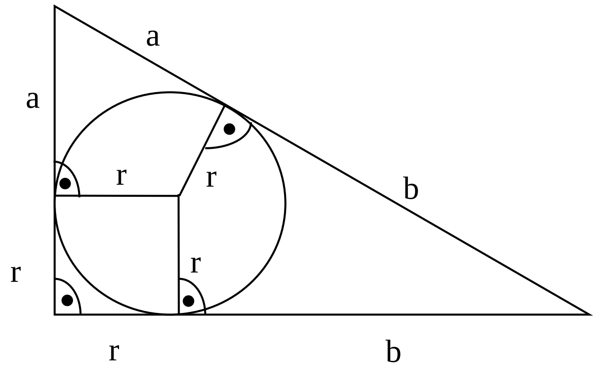
wynika, że $x \in \{-2, 2, -5, 5\}$. Jedynie dla $x = -5$ wartość wyrażenia $x^3 - x^4$ jest jedną z liczb danych w zadaniu (-750). Dla $x = -5$ mamy również $x^2 - x^4 = -600$ i $x^2 - x^3 = 150$.

Odpowiedź. Szukaną liczbą jest $x = -5$.

Zadanie 3.

Oblicz długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, którego obwód wynosi 30 cm, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt ma 2 cm .

Rozwiązanie.



Oznaczmy na rysunku odpowiednie odcinki trójkąta prostokątnego, korzystając z faktu, że: promień okręgu wpisanego w trójkąt jest prostopadły w punkcie styczności do jego boku.

Obwód trójkąta możemy teraz przedstawić:

$$30 = 2a + 2b + 2r$$
$$15 = a + b + r$$
$$a + b = 15 - 2$$
$$a + b = 13$$

Odpowiedź. Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 13 cm .

Zadanie 4.

Wojtek obliczył sumę liczb wierzchołków, krawędzi i ścian dwóch różnych graniastosłupów. Suma obu wyników jest mniejsza od 1000, a różnica jest większa od 948. Ile wierzchołków przy jednej podstawie ma każda z tych brył?

Rozwiązanie.

Oznaczmy przez n i k liczby wierzchołków przy podstawie jednego i drugiego graniastosłupa oraz przyjmijmy, że $n > k$.

Suma liczby wierzchołków, krawędzi i ścian dla pierwszej bryły jest równa $2n + 3n + n + 2 = 6n + 2$, a dla drugiej $6k + 2$.

Jest również oczywiste, że liczba wierzchołków przy podstawach jest większa lub równa 3,

czyli $n \geq 3$ i $k \geq 3$.

Zachodzą nierówności

$$6n + 2 + 6k + 2 < 1000 \text{ i } 6n + 2 - (6k + 2) > 948,$$

które po przekształceniu mają postać

$$n + k < 166 \text{ i } n - k > 158.$$

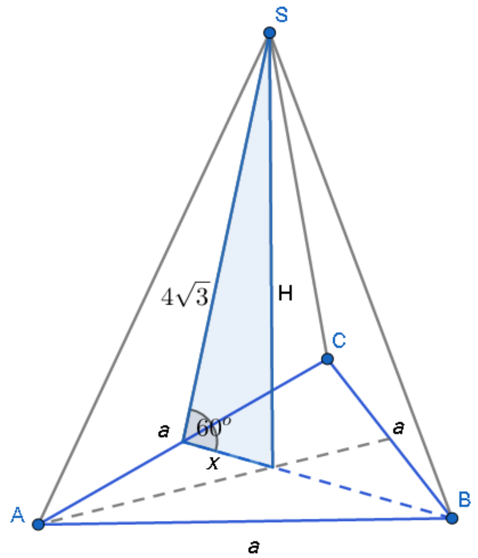
Mamy stąd dwa warunki: $n < 166 - k$ i $n > 158 + k$.

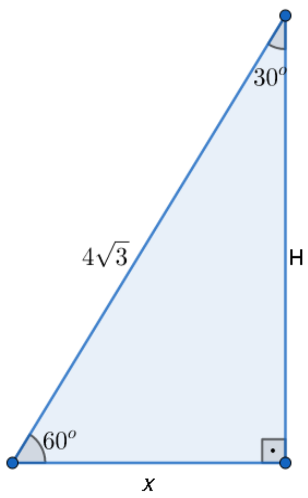
Dla $k = 3$ otrzymujemy $n < 163$ i $n > 161$ czyli $n = 162$. Dla $k > 3$ nie otrzymujemy rozwiązań.

Odpowiedź. Bryłami z zadania są graniastosłup 162 – kątny i graniastosłup trójkątny.

Zadanie 5.
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej ma długość $4\sqrt{3}$, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60^o. Oblicz objętość ostrosłupa.

Rozwiązanie.
Warunki zadania możemy przedstawić na rysunku:





Do obliczenia objętości potrzebujemy pola podstawy (długości krawędzi podstawy) oraz długości wysokości ostrosłupa.
Skoro przeciwprostokątna trójkąta o kątach $30^o, 60^o, 90^o$ jest równa $4\sqrt{3}$, więc możemy obliczyć długości odcinków:

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$
$$H = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$$

Długość odcinka x jest równa $\frac{1}{3}$ wysokości trójkąta równobocznego znajdującego się w podstawie ostrosłupa prawidłowego. Zatem:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Skąd otrzymujemy długość krawędzi podstawy $a = 12$.
Objętość ostrosłupa będzie równa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 6 = 72\sqrt{3}$$

Odpowiedź. Objętość ostrosłupa jest równa $72\sqrt{3}$.