Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne
Eliminacje – cykl lutowy,
Poziom: gimnazjum, punktacja: 10 punktów za każde zadanie

Zadanie 1.
Funkcja $f(w)$ dla każdej liczby wymiernej w jest taka, że:

$f(1) = a$ oraz $f(w+z) = f(w) + f(z)$ dla każdych liczb wymiernych w i z.

Zapisz wzór funkcji $f(w)$.

Wskazówka. Dodając n ułamków $\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$ otrzymujemy 1.

Rozwiązanie.
Mamy $f(1) = a$ oraz dla $z = w$ mamy $f(w+w) = f(w) + f(w) = 2f(w)$.
Podobnie otrzymamy:

$f(3w) = f(2w+w) = f(2w) + f(w) = 2f(w) + f(w) = 3f(w)$
$f(4w) = f(3w+w) = f(3w) + f(w) = 3f(w) + f(w) = 4f(w)$
itd.…
Można zauważyć, że dla kolejnych wielokrotności kw liczby w otrzymamy $f(kw) = kf(w)$

Teraz zauważmy, że $a = f(1) = f(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}) = f(\frac{1}{n}) + \ldots + f(\frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$. Stąd otrzymujemy

$a = nf(\frac{1}{n})$ i ostatecznie $f(\frac{1}{n}) = \frac{a}{n}$.

Ponieważ każda liczba wymierna dodatnia daje się przedstawić jako ułamek

$$w = \frac{k}{n} = \underbrace{\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k-razy},$$

to

$$f(w) = f\left(\frac{k}{n}\right) = f\underbrace{\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{k-razy} = kf\left(\frac{1}{n}\right) = k \cdot \frac{a}{n} = a \cdot \frac{k}{n} = aw$$

czyli $f(w) = aw$ dla dowolnej liczby wymiernej dodatniej w.

Ponieważ $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, to $f(0) = 0$ oraz

$0 = f(0) = f(w + (-w)) = f(w) + f(-w)$ co daje $f(-w) = -f(w) = -aw = a(-w)$.

Odpowiedź. Dla wszystkich liczb wymiernych $f(w) = aw$.

Zadanie 2.
Wyznacz wszystkie liczby trzycyfrowe spełniające następujące warunki:
1. pierwsza cyfra (od lewej strony) jest trzy razy mniejsza od ostatniej cyfry,
2. suma tej liczby i liczby otrzymanej z przestawienia dwóch ostatnich cyfr jest podzielna przez 8.

Rozwiązanie.

Niech a oznacz cyfrę setek, b – cyfrę dziesiątek i c – cyfrę jedności.

Założenia : $a \in \{1,2,3,...,9\}$, $b \in \{0,1,2,3,...,9\}$, $c \in \{0,1,2,...,9\}$

Liczba zapisana za pomocą tych cyfr jest równa 100a + 10b + c. Liczba otrzymana po przestawieniu dziesiątek i jedności jest równa 100a + 10c + b.

Suma liczb wynosi 200a + 11b + 11c. Z warunku 1 z treści zadania wynika, że a może być równa 1, 2, 3, zaś c równa odpowiednio 3, 6, 9.

Jeżeli a = 1 i c = 3, to suma liczb wynosi 200 + 33 + 11b = 233 + 11b i jest ona podzielna przez 8 dla b = 5, wtedy szukana liczba wynosi 153.

Jeżeli a = 2 i c = 6, to suma liczb wynosi 200 + 66 + 11 b = 266 + 11b i jest ona podzielna przez 8 dla b = 2 , wtedy szukana liczba jest równa 226.

Jeżeli a = 3 i c = 9, to suma liczb wynosi 200 + 99 + 11b = 299 + 11 b i jest ona podzielna przez 8 dla b = 7, wtedy szukana liczba jest równa 379.

Sprawdzenie 153+135 =288, 288 : 8 = 36

226 + 262 = 488 , 488 : 8 = 61

379 + 397 = 778, 778 : 8 = 97

Odpowiedź. Szukane liczby to: 153, 226, 379.

Zadanie 3.
Andrzej, Bogdan i Celina rok temu mieli łącznie 40 lat. Jeżeli do połowy wieku Andrzeja dodamy trzecią część wieku Bogdana i czwartą część wieku Celiny , to otrzymamy obecny wiek Bogdana. Jeżeli obecnie policzymy średnią arytmetyczną wieku wszystkich, to otrzymamy wiek Bogdana sprzed roku. Ile lat ma każde z nich obecnie?

Rozwiązanie.
Oznaczając: A – obecny wiek Andrzeja, B – obecny wiek Bogdana i C – obecny wiek Celiny otrzymujemy, że suma ich wieku sprzed roku jest równa 40 lat, a obecnie 43 lata, ponieważ każdy z nich jest o rok starszy.

Średnia arytmetyczna $\frac{A+B+C}{3} = \frac{43}{3} = 14\frac{1}{3}$ i jest to wiek Bogdana sprzed roku, czyli obecnie Bogdan ma lat $B = 14\frac{1}{3} + 1 = 15\frac{1}{3}$.

Wobec tego suma wieku Andrzeja i Celiny jest równa $A + C = 43 - B = 43 - 15\frac{1}{3} = 27\frac{2}{3}$.

Z treści zadania wynika dodatkowo, że $\frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}C = B$, czyli

$$\frac{1}{2}A + \frac{1}{4}C = B - \frac{1}{3}B = \frac{2}{3}B = \frac{2}{3} \cdot 15\frac{1}{3} = 10\frac{2}{9}$$

Wobec tego musimy rozwiązać układ równań:

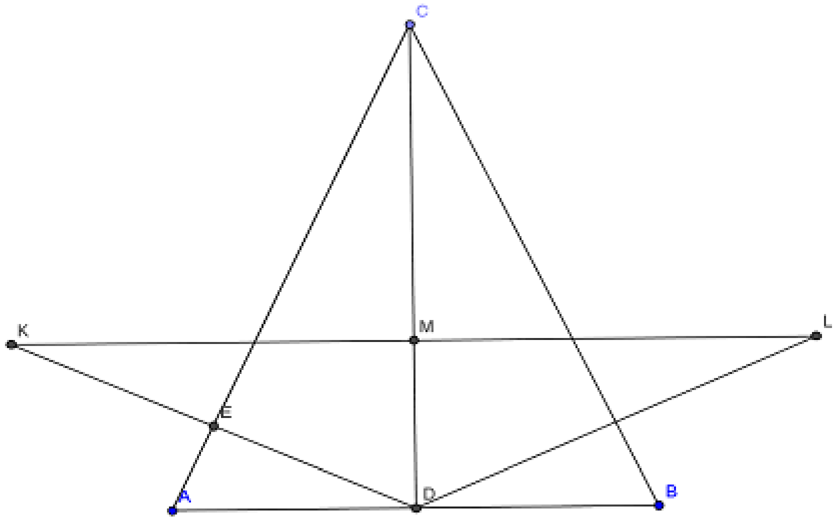
$$\begin{cases} A + C = 27\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}C = 10\frac{2}{9} \end{cases}$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy $A = 13\frac{2}{9}$ i $C = 14\frac{4}{9}$.

Odpowiedź. Andrzej ma $13\frac{2}{9}$ lat, Bogdan ma $15\frac{1}{3}$ i Celina na $14\frac{4}{9}$.

Zadanie 4.
Punkty A,B,C są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym punkt D jest środkiem podstawy AB. Punkt K- z kolei – jest symetryczny do punktu D względem prostej AC, punkt L – symetryczny do punktu D względem prostej BC.
Oblicz odległość punktów K i L, jeśli $|AB| = |CD| = 10$ dm.

Rozwiązanie.



Długość ramienia AC trójkąta ABC wynosi $5\sqrt{5}$ dm, zaś pole trójkąta ACD obliczamy następująco: $P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |CD| = 25dm^2$.

Odcinek DE, gdzie E jest środkiem odcinka DK, jest wysokością trójkąta ADC poprowadzoną z wierzchołka D. Długość odcinka DE obliczamy następująco: $|DE| = \frac{2P_{\Delta ACD}}{|AC|} = \frac{|AD| \cdot |CD|}{|AC|} = \frac{5 \cdot 10}{\sqrt{5}} dm = 2\sqrt{5}dm$. Stąd $|DK| = 4\sqrt{5}dm$.

Odcinek KM, gdzie M jest środkiem odcinka KL jest wysokością trójkąta CDK. Długość wysokości CE trójkąta CDK jest równa $4\sqrt{5}dm$, a pole trójkąta CDK obliczamy następująco:

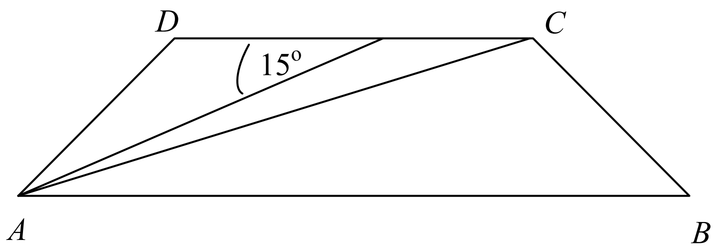
$$P_{\Delta CDK} = |DE| \cdot |CE| = 40dm^2.$$

Długość odcinka KM jest równa 8 dm; obliczamy ją na podstawie wzoru $|KM| = \frac{2P_{\Delta CDK}}{|CD|}$.

Odpowiedź. Długość odcinka KL jest równa 16 dm.

Zadanie 5.

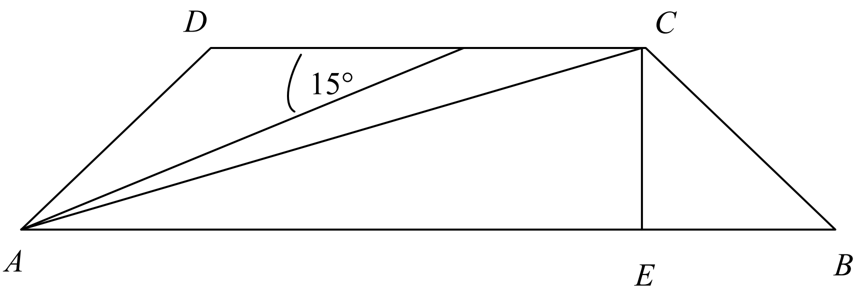
W trapezie równoramiennym $ABCD$ dwusieczna kąta ostrego przecina podstawę CD pod kątem 15°, jak na rysunku. Długości podstaw tego trapezu są równe $10\sqrt{3}$ i $6\sqrt{3}$.



Oblicz długość przekątnej AC tego trapezu.

Rozwiązanie.

Dostrzegamy kąty naprzemianległe i wnioskujemy, że kąty ostre trapezu mają miarę 30°.



Odcinek CE jest wysokością trapezu. Zatem trójkąt EBC ma kąty o miarach 30°, 60°, 90°. Zauważamy, że odcinek BE ma miarę $2\sqrt{3}$, więc odcinek CE ma długość 2. Odcinek AE ma długość $8\sqrt{3}$.

Obliczamy długość przekątnej AC: $\left(8\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = AC^2$, $AC^2 = 196$, $AC = 14$

Odpowiedź. Długość przekątnej jest równa $AC = 14$.