XVII Warmińsko-Mazurskie Zawody Matematyczne

Eliminacje – cykl listopadowy

Poziom: klasy 8 i 9

Punktacja: 10 punktów za każde zadanie (zadania rozwiązywane w domu).

Zadanie 1.

Wiedząc, że $x+\frac{1}{x}=3$. Oblicz: $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$.

Rozwiązanie:

Podnosimy obie strony równania $x+\frac{1}{x}=3$ do kwadratu.

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9\text{, więc } x^2+\frac{1}{x^2}=7.$$

Wyliczamy teraz $x^3+\frac{1}{x^3}$. Wiemy już, że

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=7\cdot 3=21,$$

Stąd

$$x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=21,\quad x^3+3+\frac{1}{x^3}=21,\quad x^3+\frac{1}{x^3}=18.$$

Odpowiedź. $x^2+\frac{1}{x^2}=7$, $x^3+\frac{1}{x^3}=18.$

Zadanie 2.

Dwie krawcowe obszywały brzegi obrusów. Pierwszej ta czynność zabiera 25 minut, natomiast drugiej 30 minut. Obie zaczynają pracę o godzinie $7^{\underline{00}}$. Ile razy skończą jednocześnie obszywać obrusy w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy?

Rozwiązanie:

Ponieważ $NWW(25,30)=150$ minut, zatem pierwszy raz obydwie krawcowe skończyły jednocześnie obszywać obrus po 150 minutach od rozpoczęcia pracy, więc o godzinie $9^{\underline{30}}$. Jeśli pracowały 8 godzin, to pracowały

$$8\cdot 60\text{minut}=480\text{minut}.$$

Stąd $480\text{minut} : 150\text{minut} = 3{,}2$, więc 3 razy jednocześnie skończyły obszywać obrus w ciągu ośmiogodzinnego dnia pracy.

Odpowiedź. Krawcowe trzy razy jednocześnie skończyły obszywać obrusy.

Zadanie 3.
Wykaż, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów długości przekątnych jest równa różnicy kwadratów długości podstaw.

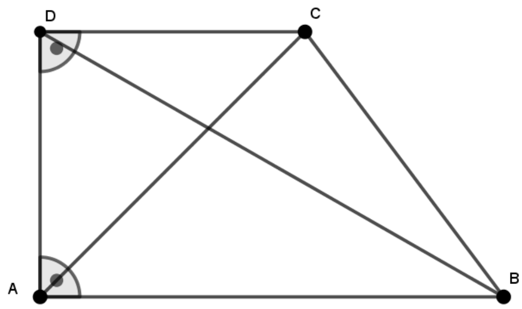
Rozwiązanie:

Założenie: ABCD jest trapezem prostokątnym

Teza: $|BD|^2 - |AC|^2 = |AB|^2 - |CD|^2$

Dowód:

ABCD jest trapezem prostokątnym, to trójkąty BAD i ADC są prostokątne. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa mamy:



$$\begin{cases} |BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 \\ |AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 \end{cases},$$

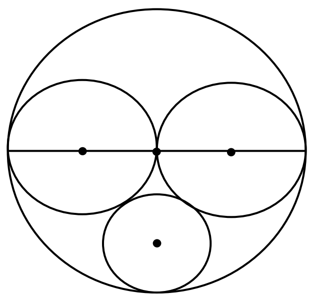
odejmując równania stronami, otrzymamy:

$|BD|^2 - |AC|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - |AD|^2 - |CD|^2$,

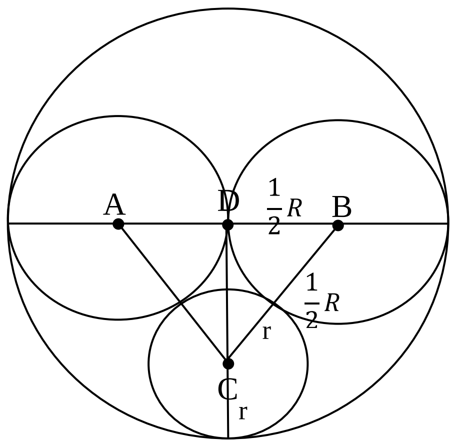
zatem $|BD|^2 - |AC|^2 = |AB|^2 - |CD|^2$.

Zadanie 4.

Okręgi przedstawione na rysunku są styczne. Promień największego okręgu jest równy R. Wyznacz długość promienia najmniejszego z tych okręgów.



Rozwiązanie:



$$(R-r)^2+(\frac{1}{2}R)^2=(\frac{1}{2}R+r)^2$$

$$R^2-2rR+r^2+\frac{1}{4}R^2=\frac{1}{4}R^2+rR+r^2$$

$$R^2-2rR-rR=0$$

$$R^2-3rR=0$$

$$R^2-3rR=0$$

$$R=3r$$

$$r=\frac{1}{3}R$$

Odpowiedź. $r=\frac{1}{3}R.$

Zadanie 5.

Na wszystkich ścianach pewnego graniastosłupa prostego zaznaczono wszystkie przekątne. Łącznie było ich 90. Jaki wielokąt w podstawie ma ten graniastosłup?

Rozwiązanie:

Każdy graniastosłup ma dwie podstawy i tyle ścian bocznych ile krawędzi w podstawie.

Jeżeli przez *n* oznaczymy liczbę krawędzi podstawy, to ta podstawa ma $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ przekątnych. Każda ściana boczna graniastosłupa prostego jest prostokątem, zatem ma 2 przekątne.

Zatem:

liczba przekątnych podstaw jest równa $\frac{n\cdot(n-3)}{2}\cdot 2=n\cdot(n-3)$

liczba przekątnych ścian bocznych jest równa $2n$

Otrzymujemy więc równanie:

$$n\cdot(n-3)+2n=90$$

Po przekształceniu mamy:

$$n^2-3n+2n=90$$

$$n^2-n=90$$

$$n\cdot(n-1)=90$$

Jest to iloczyn kolejnych liczb naturalnych, zatem *n* = 10. Podstawą tego graniastosłupa jest więc dziesięciokąt.

Odpowiedź. Podstawą tego graniastosłupa jest dziesięciokąt.